[제 3 판]

보험수리학

정답과 해설

이항석 · 권혁성

法 文 社

차 례

0장 이자론 기초 ······ 5

1장 생존분포와 생명표 ······ 28

2장 생명보험 ······ 39

3장 생명연금 ······ 58

4장 보험료 ······ 71

5장 준비금 ······ 83

6장 준비금의 분석 ······ 94

7장 연생 ······ 105

8장 다중탈퇴모형 ······ 125

9장 사업비를 고려한 모형 ······ 145

10장 다중상태모형의 적용 ······ 156

정답표 ······ 172

정답과 해설

0장 이자론 기초

문제 1번

답 (1) 그래프 생략

(2) $0 < t < 1$

(3) 최대가 되는 시점: $\log_{(1+i)}\dfrac{i}{\ln(1+i)}$,

누적가치의 차이: $1+i\log_{(1+i)}\dfrac{i}{\ln(1+i)}-\dfrac{i}{\ln(1+i)}$

풀이

(1) 그래프 생략

(2) 그래프를 그려보면 $0 < t < 1$의 구간에서 단리법의 누적가치가 복리법의 누적가치보다 크다는 것을 확인할 수 있다.

(3) $0 < t < 1$ 구간에서 단리법의 누적가치와 복리법의 누적가치의 차이가 최대가 되는 지점을 구하려면 복리 그래프 $y_1=(1+i)^t$의 기울기가 단리 그래프 $y_2=1+it$의 기울기와 같아지는 지점을 찾으면 된다.

$\dfrac{dy_1}{dt}=\ln(1+i)\times(1+i)^t$이므로 이것이 $\dfrac{dy_2}{dt}=i$와 같게 만들어주는 t값을 구해주면 된다.

$\ln(1+i)\times(1+i)^t=i$

$(1+i)^t=\dfrac{i}{\ln(1+i)}$

$$t \times \ln(1+i) = \ln \frac{i}{\ln(1+i)}$$

$$t = \frac{\ln \frac{i}{\ln(1+i)}}{\ln(1+i)} = \log_{(1+i)} \frac{i}{\ln(1+i)}$$

$$y_1 = (1+i)^t = (1+i)^{\log_{(1+i)} \frac{i}{\ln(1+i)}} = \frac{i}{\ln(1+i)}$$

$$y_2 = 1 + it = 1 + i \log_{(1+i)} \frac{i}{\ln(1+i)}$$

그러므로 단리법의 누적가치와 복리법의 누적가치의 차이가 최대가 되는 시점은 $\log_{(1+i)} \frac{i}{\ln(1+i)}$이고, 그 시점에서의 누적가치의 차이는 $y_2 - y_1 = 1 + i \log_{(1+i)} \frac{i}{\ln(1+i)} - \frac{i}{\ln(1+i)}$이다.

문제 2번

답 (1) 1,240,747.378
(2) 1,220,000
(3) 1,384,233.871
(4) 1,244,715.860

풀이

(1) $1{,}000{,}000(1+0.04)^{5.5} = 1{,}240{,}747.378$
(2) $1{,}000{,}000(1+5.5 \times 0.04) = 1{,}220{,}000$
(3) $1{,}000{,}000(1.03)^{5.5 \times 2} = 1{,}384{,}233.871$
(4) $1{,}000{,}000(1.01)^{5.5 \times 4} = 1{,}244{,}715.860$

문제 3번

답 (1) 0.00498
(2) 0.00848
(3) 0.02912
(4) 0.00995
(5) 0.03023

풀이

(1) 월이율$=(1+$분기이율$)^{\frac{1}{3}} - 1 = (1.015)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.004975$

(2) 월이율 $=(1+\text{분기할인율})^{-\frac{1}{3}}-1=(1-0.025)^{-\frac{1}{3}}-1=0.008475$

(3) 분기할인율 $=1-\left[\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{4}}=1-(1.03)^{-1}=0.0291262$

(4) 분기할인율 $=1-\left[(e^{0.04})^{-\frac{1}{4}}\right]=0.009950$

(5) 이력 $=\ln\left[\left(1-\frac{0.03}{2}\right)^{-2}\right]=0.0302272276$

문제 4번

답 5.295

풀이

철수는 연이율 5% 단리 이율인 펀드 A에 현재 10을 적립하고, 5년후 20을 적립하고자 한다.

펀드 A의 미래가치는 다음과 같다.

$FV_A=10(1+15\times 0.05)+20(1+10\times 0.05)=47.5$

영희는 연이율 3% 복리이율인 펀드 B는 n년 후 10, 2n년 후 30을 적립하고자 한다.

펀드 B의 미래가치는 다음과 같다.

$FV_B=10(1.03)^{15-n}+30(1.03)^{15-2n}$

$FV_A=FV_B$ 인 n값을 구하자. $(1.03)^{15}\approx 1.558$이고, $x=(1.03)^{-n}$으로 놓는다.

$47.5=10\times 1.558\times x+30\times 1.558\times x^2$

$46.74x^2+15.58x-47.5=0$

$$x=\frac{-15.58\pm\sqrt{(15.58)^2-4\times 46.74\times(-47.5)}}{2\times 46.74}$$

$$x=\frac{-15.58\pm\sqrt{242.7364+8,880.6}}{93.48}=\frac{-15.58\pm\sqrt{9,123.3364}}{93.48}$$

$$x_1=\frac{-15.58+\sqrt{9,123.3364}}{93.48}=0.85511508,$$

$$x_2=\frac{-15.58-\sqrt{9,123.3364}}{93.48}=-1.18844887$$

$x=(1.03)^{-n}$ $(n>0)$이므로, $x>0$이다. 그러므로 $x=0.85511508$이다.

$x=0.85511508=(1.03)^{-n}$

$\ln(0.85511508)=-n\times\ln(1.03)$

$\therefore\ n=-[\ln(0.85511508)\div\ln(1.03)]=5.295$

문제 5번

답 16,666,667원

풀이

$10{,}000{,}000(1-dt)^{-1}=10{,}000{,}000(1-0.04\times 10)^{-1}=16{,}666{,}667$

그러므로 10년 후 시점에서의 누적가치는 16,666,667원이다.

문제 6번

답 409,838.217원

풀이

현재 저축계좌에 50만원을 투자하고 1년 후 5만원을 인출하고, 2년 후 15만원을 인출한다.

이 흐름을 수식화하면 다음과 같다.

$$[\{500{,}000\times(1-0.05)^{-1}-50{,}000\}\times(1-0.05)^{-1}-150{,}000]\times(1-0.05)^{-3}$$
$$=409{,}838.2173$$

따라서 5년 후 저축계좌의 잔고는 409,838.2173원이다.

문제 7번

답 19,606.760원

풀이

2개월 복리를 적용하는 연 명목이율이 12%이므로 $i^{(6)}=12\%$이다.

$$10{,}000\left[\left(1+\frac{i^{(6)}}{6}\right)^{6}\right]^{5+\frac{8}{12}}=10{,}000\left[\left(1+\frac{0.12}{6}\right)^{6}\right]^{\frac{68}{12}}=19{,}606.760\text{원}$$

문제 8번

답 1,109,978.509원

풀이

$$500{,}000\left[\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}\right]^{10+\frac{2}{12}}=500{,}000\left[\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{122}{12}}=1{,}109{,}978.509\text{원}$$

문제 9번

답 실효이율 0.00742, 발생이자 7,927.135

풀이

실효이율 $= \dfrac{(\text{해당기간 중 발생이자})}{(\text{해당기간 초 가치})}$ 이므로 10월중 발생이자와 해당기간 10월 초 가치를 구해야 한다.

$$10\text{월 초 가치} = 1{,}000{,}000 \times \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{9} = 1{,}000{,}000\left[\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{9}$$

$$= 1{,}000{,}000\left(1+\frac{0.09}{3}\right)^{\frac{9}{4}} = 1{,}068{,}768.711$$

$$10\text{월 중 발생이자} = 1{,}000{,}000 \times \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{10} - 1{,}000{,}000 \times \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{9}$$

$$= 1{,}000{,}000\left[\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{10} - 1{,}000{,}000\left[\left(1+\frac{i^{(3)}}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{9} = 7{,}927.135$$

$$\text{실효이율} = \frac{7{,}927.1950}{1{,}068{,}768.711} = 0.00741712$$

문제 10번

답 월 이율 최솟값 0.00412

풀이

$$\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2} < \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$$

$$\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{2} < \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$$

여기서 월이율인 $\dfrac{i^{(12)}}{12}$ 의 최솟값을 구해주면 된다.

$$\frac{i^{(12)}}{12} > \left[\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right] = 0.004124$$

그러므로 월이율은 0.004124보다 큰 값이어야 한다.

문제 11번

답 해설 참조

풀이

(1) (pf) $d = 1 - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{i}{1+i} \Rightarrow \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{i} = \dfrac{1+i}{i} - \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i} = 1$

(2) (pf) $\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}=\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \Rightarrow \left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1}=\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-d^{(m)}}{m}\right)^{-1}=\frac{m}{m-d^{(m)}}=\frac{m+i^{(m)}}{m}$$

$$\frac{m}{m-d^{(m)}}=\frac{m+i^{(m)}}{m} \Rightarrow (m-d^{(m)})(m+i^{(m)})=m^2$$

$$\Rightarrow m^2+(i^{(m)}-d^{(m)})m-i^{(m)}d^{(m)}=m^2$$

$$\Rightarrow (i^{(m)}-d^{(m)})m=i^{(m)}d^{(m)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{i^{(m)}}=\frac{1}{m}$$

(3) (pf) $\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=1+i \Rightarrow 1+\dfrac{i^{(m)}}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}$

By (2) $d^{(m)}=\dfrac{m\ i^{(m)}}{m+i^{(m)}}=\dfrac{i^{(m)}}{1+\dfrac{i^{(m)}}{m}} \Rightarrow d^{(m)}(1+i)^{\frac{1}{m}}=i^{(m)}$

문제 12번

답 0.045

풀이

A가 현재 시점에 적립하는 10과 15년 후 적립하는 20의 미래가치를 각각 계산해서 더해준 값이 100이 되도록 식을 세워주자.

$$FV_{10}=10\left[\left\{\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}\right\}^{10}\times\left\{\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}\right\}^{20}\right]$$

$$=10\left[\left\{\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}\right\}^{10}\times\left\{\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2}\right\}^{20}\right]$$

$$FV_{20}=20\left[\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}\right]^{15}=20\left[\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2}\right]^{15}$$

$$FV_{10}+FV_{20}=100$$

$$10\left[\left\{\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}\right\}^{10}\times\left\{\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2}\right\}^{20}\right]+20\left[\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2}\right]^{15}=100$$

$$10\left[\left\{\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}\right\}^{10}\times\left\{\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2}\right\}^{20}\right]=51.4548$$

$$10\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-40}=15.7738$$

$$\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-40}=1.57738$$

$$\therefore\ d^{(4)}=0.045318$$

문제 13번

답 (1) 0.027

(2) 946.62

풀이

(1) $a(t)=\exp\int_0^t \left(0.02+\dfrac{0.015s}{s+3}\right)ds$

$$=\exp\int_0^t \left(0.02+\frac{0.015(s+3)-0.045}{s+3}\right)ds$$

$$=\exp[0.035s-0.045\ln(s+3)]_0^t$$

$$=\exp(0.035t-0.045\ln(t+3)+0.045\ln 3)$$

$$=\exp\left(0.035t+0.045\ln\frac{3}{(t+3)}\right)$$

$$=e^{0.035t}\times\left(\frac{3}{t+3}\right)^{0.045} \qquad (\because\ \exp(\ln a)=a)$$

$$a(t)=e^{0.035t}\times\left(\frac{3}{t+3}\right)^{0.045}$$

$a(0)=1,\ a(5)=e^{0.175}\times\left(\dfrac{3}{8}\right)^{0.045}=1.1398=i_5$ (5년간 실효이율)

연평균 실효이율: i

$$(1+i)^5=1.1398$$

$$i=1.1398^{\frac{1}{5}}-1$$

$$\therefore\ i=0.0265$$

(2) $a(t)=e^{0.035t}\times\left(\dfrac{3}{t+3}\right)^{0.045}$

$$a(2)=e^{0.07}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{0.045}=1.0481$$

$$a(4)=e^{0.14}\times\left(\frac{3}{7}\right)^{0.045}=1.1072$$

$$\frac{a(4)}{a(2)}=\frac{1.1072}{1.0481}=1.0564$$

$$1.0564\times A(2)=1{,}000$$

$\therefore\ A(2)=946.62$

문제 14번

답 0.076

풀이

이력이 범위마다 다르기 때문에 $\dfrac{a(10)}{a(0)}$과 $\dfrac{a(20)}{a(10)}$을 각각 구해야 한다.

(i) $\dfrac{a(10)}{a(0)} \quad (0 \le t \le 10)$

$$a(t)=e^{\int_0^t 0.01s\,ds}=e^{[0.005s^2]_0^t}=e^{0.005t^2}$$

$$\frac{a(10)}{a(0)}=\frac{e^{0.5}}{1}$$

(ii) $\dfrac{a(20)}{a(10)} \quad (t>10)$

$$a(t)=e^{\int_0^t 0.1dt}=e^{0.1t}$$

$$\frac{a(20)}{a(10)}=\frac{e^2}{e^1}$$

이렇게 20년간 1,000원을 투자한 수익이 분기복리 연 명목이율 $i^{(4)}$를 적용한 것과 동일해야 한다.

$$1{,}000\left[\frac{e^{0.5}}{1}\times\frac{e^2}{e^1}\right]=1{,}000\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{80}$$

$$e^{1.5}=\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{80}$$

$$\therefore\ i^{(4)}=0.075708$$

문제 15번

답 240,411.760

풀이

(i) 처음 5년

$$\left[\left(1-\frac{d^{(5)}}{5}\right)^{-5}\right]^5$$

(ii) 그 이후 5년

$$a(t)=e^{\int_0^t \frac{1}{1+2s}ds}=e^{\left[\frac{1}{2}ln(1+2s)\right]_0^t}=e^{\frac{1}{2}ln(1+2t)}=\sqrt{1+2t}$$

$$\frac{a(10)}{a(5)}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{11}}$$

(iii) 마지막 5년

$$\left[\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}\right]^5$$

현재 투자하는 금액을 A라 할 때,

$$A\times\left[\left(1-\frac{d^{(5)}}{5}\right)^{-5}\right]^5\times\frac{a(10)}{a(5)}\times\left[\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}\right]^5=1{,}000{,}000$$

$$A\times\left[\left(1-\frac{0.1}{5}\right)^{-5}\right]^5\times\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{11}}\times\left[\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12}\right]^5=1{,}000{,}000$$

$\therefore\ A=240{,}411.7600$

문제 16번

답 0.381

풀이

펀드 X에 주어진 이력을 이용하여 단위 종가함수를 구한다.

$$a(t)=e^{\int_0^t(0.03s+0.1)ds}=e^{[0.015s^2+0.1s]_0^t}=e^{0.015t^2+0.1t}$$

$$a(20)=e^{0.015\times(20)^2+0.1\times20}=e^8$$

X와 Y에 각각 100만원을 동시에 투자했을 때 20년 후 누적금액이 동일해야 한다.

$$1{,}000{,}000\times a(20)=1{,}000{,}000\left[\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}\right]^{20}=\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-80}$$

$$1{,}000{,}000\times e^8=1{,}000{,}000\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-80}$$

$\therefore\ d^{(4)}=0.38065$

문제 17번

답 0.078

풀이

(i) A은행

t번째 해인 시점 $(t-1)$에서 시점 t까지의 실효할인율은

$$d_{t-1,1}=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t)}=0.015t+0.03$$

$$a(t)-a(t-1)=(0.015t+0.03)a(t)$$

$$a(t)(0.97-0.015t)=a(t-1)$$

$$\frac{a(t)}{a(t-1)}=\frac{1}{0.97-0.015t}$$

$$\frac{a(5)}{a(0)}=\frac{a(1)}{a(0)}\times\frac{a(2)}{a(1)}\times\frac{a(3)}{a(2)}\times\frac{a(4)}{a(3)}\times\frac{a(5)}{a(4)}$$

$$=\frac{1}{0.955}\times\frac{1}{0.94}\times\frac{1}{0.925}\times\frac{1}{0.91}\times\frac{1}{0.895}=1.4786$$

(ii) B은행

$$a(t)=e^{\int_0^t \delta ds}=e^{\delta t}$$

$$\frac{a(5)}{a(0)}=e^{5\delta}$$

$$1.4786=e^{5\delta}$$

$$\ln(1.4786)=5\delta$$

$$\therefore\ \delta=0.07822$$

문제 18번

답 666,442.837

풀이

10년 시점의 누적가치를 알기 위해서는 현재 투자하는 금액(A)을 알아야 한다. 3번째 해의 발생 이자가 10,000임을 이용하기 위해 이력을 이용한 누적함수 $a(t)$를 구한다.

$$a(t)=\exp\left(\int_0^t \delta_s\ ds\right)=\exp\left(\int_0^t 0.15\sqrt{s}\,ds\right)=\exp\left(0.1\left(t^{\frac{3}{2}}-1\right)\right)$$

3번째해 발생이자: $A[a(3)-a(2)]=10{,}000$

$$a(3)=\exp\left(0.1\left(3^{\frac{3}{2}}-1\right)\right)=1.5213761$$

$$a(2)=\exp\left(0.1\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)\right)=1.2006255$$

$\rightarrow A=31{,}176.87736$

10년 시점의 누적가치: $A\times a(10)$

$$a(10)=\exp\left(0.1\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)\right)=21.3761895$$

$\therefore\ A\times a(10)=666{,}442.8371$

문제 19번

답 $d^{(2)} > d^{(6)} > \delta > i^{(12)} > i^{(4)}$

풀이

$$1+i=\left(1-\frac{d^{(6)}}{6}\right)^{-6}=\left(1-\frac{0.07}{6}\right)^{-6} \rightarrow \text{실효이자율 } i=0.07295$$

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4}=\left(1+\frac{0.07}{4}\right)^{4} \rightarrow \text{실효이자율 } i=0.07186$$

$$1+i=e^{\delta}=e^{0.07} \rightarrow \text{실효이자율 } i=0.07251$$

$$1+i=\left(1-\frac{d^{(2)}}{2}\right)^{-2}=\left(1-\frac{0.07}{2}\right)^{-2} \rightarrow \text{실효이자율 } i=0.07385$$

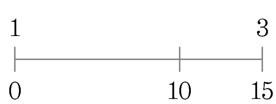
$$1+i=\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}=\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{12} \rightarrow \text{실효이자율 } i=0.07229$$

∴ 연 실효이율이 높은 순서: $d^{(2)} > d^{(6)} > \delta > i^{(12)} > i^{(4)}$

문제 20번

답 0.060

풀이



누적함수$a(t)=\exp\left(\int_0^t \delta_s \, ds\right)$

$$a(t)=\begin{cases} e^{0.08t}, & 0<t<10 \\ e^{\delta t}, & t \geq 10 \end{cases}$$

15년 말 시점 가치: $1 \times a(15)=1 \times e^{0.08 \times 10} \times e^{\delta \times 5}=3$

$e^{0.8+5\delta}=3$

$0.8+5\delta=\ln 3 \quad \therefore \quad \delta=0.05972$

문제 21번

답 (1) $\frac{4}{33}$

(2) 1.175

풀이

(1) $a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s \, ds\right)$

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\frac{1}{4}(1+2t^2)^{\frac{-3}{4}} \times 4t}{(1+2t^2)^{\frac{1}{4}}} = t(1+2t^2)^{-1}$$

$\therefore \ \delta_4 = \dfrac{4}{33}$

(2) $a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s \, ds\right)$

$$\int_0^t \frac{0.1s^2}{1+s^3} ds = \frac{0.1}{3}\left[\ln(1+s^3)\right]_0^t = \frac{1}{30} ln(1+t^3)$$

$$a(t) = e^{\frac{1}{30} ln(1+t^3)} = (1+t^3)^{\frac{1}{30}}$$

$\therefore \ a(5) = 126^{\frac{1}{30}} = 1.1749$

문제 22번

답 109,527.654만원

풀이

누적함수 $a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s \, ds\right)$

3시점에서 투자한 100만원의 10시점에서의 누적가치$= 100\left(\dfrac{a(10)}{a(3)}\right)$

$$a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s \, ds\right) = \exp\left(\int_0^t \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} \, ds\right) = \left(\frac{1+e^{2t}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore \ 100\left(\dfrac{a(10)}{a(3)}\right) = 109,527.6540$만원

문제 23번

답 e

풀이

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\frac{1}{t} \times \ln t \times \exp\left(\frac{1}{2}(\ln t)^2\right)}{\exp\left(\frac{1}{2}(\ln t)^2\right)} = \frac{1}{t} lnt$$

$$\frac{d}{dt}\delta_t = \frac{1}{t^2}(1-\ln t) = 0$$

$$\therefore \ t = e$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta_t = -\frac{2}{t^3}(1-\ln t) - \frac{1}{t^3}$$

t에 e를 대입 $\rightarrow -\frac{1}{e^3} < 0$ (최대임을 확인)

문제 24번

답 해설 참조

풀이

(1) $(pf) a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$, $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1-v^n)(1+i)^n}{i}$ 일 때,

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{1-v^n} - \frac{i}{(1-v^n)(1+i)^n}$$

$$= \frac{i(1+i)^n - i}{(1-v^n)\ (1+i)^n}$$

$$= \frac{i\{(1+i)^n - 1\}}{(1-v^n)\ (1+i)^n}$$

$$= \frac{i}{(1-v^n)} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times \frac{i}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \times a_{\overline{n}|i}(1+i)^n \times \frac{i}{(1+i)^n} = i$$

$$\therefore \ \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} = 1$$

(2) $(pf)\ \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{d}$, $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} = \frac{(1-v^n)(1+i)^n}{d}$ 일 때,

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = \frac{d}{1-v^n} - \frac{d}{(1-v^n)(1+i)^n}$$

$$= \frac{d(1+i)^n - d}{(1-v^n)\ (1+i)^n}$$

$$= \frac{d\{(1+i)^n - 1\}}{(1-v^n)\ (1+i)^n}$$

$$= \frac{d}{(1-v^n)} \times \frac{(1+i)^n - 1}{d} \times \frac{d}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \times a_{\overline{n}|i}(1=i)^n \times \frac{d}{(1+i)^n} = d$$

$$\therefore\ \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = d$$

문제 25번

답 매 시점말에 이자 i만 따로 모아서 n년까지 부리시킨 값과, 복리로 투자했을 때 생긴 총 이자 값은 같다.

풀이

$$i \cdot s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n - 1$$

매 시점 발생하는 이자 i만 따로 모아서

매 시점 말, n년 동안 부리 시키면

복리로 n년 투자했을 때 생긴 총 이자 값과 같다.

문제 26번

답 0.0372

풀이

24년 후 미래가치

선택1: $100(1+i)^{24}$

선택2: 연금수령액 x 일 때,

$$100 = x\,a_{\overline{24}|0.04} = x\frac{1-(1.04)^{-24}}{0.04} \rightarrow x = 6.6586831$$

$$24년\ 후\ 미래가치:\ x\,s_{\overline{24}|0.035} = x\frac{(1.035)^{24} - 1}{0.035} = 240.4841401$$

$\rightarrow 100(1+i)^{24} = 240.4841401$

$\therefore\ i = 0.037238436$

문제 27번

답 306.997 만원 (약 307만원)

풀이

매달 할부지불하기 위한 한달 실효이율: $\frac{i^{(12)}}{12}$

$\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}=(1+i)=1.045 \rightarrow \frac{i^{(12)}}{12}=0.0036748=j$

계약금 : x

3,000만원 $=x+80$만원 $\times a_{\overline{36}|j}$

$a_{\overline{36}|j}=\frac{1-v^{36}}{j}=33.6625339$

$\therefore$ 계약금 $x=306.9972896$만원(약 307만원)

문제 28번

답 68.396만원

풀이

3년 말 시점 잔여 채무: $1000(1.05)^3-50\ddot{s}_{\overline{12}|j}$, $j=\frac{i^{(4)}}{4}=0.0122722$

$\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4}=(1+i)=1.05$

$\ddot{s}_{\overline{12}|j}=12.8440703$

$\rightarrow$ $1{,}000(1.05)^3-50\ddot{s}_{\overline{12}|j}=515.4214831$

3년 말 시점 매 분기 상환금(x)의 현가: $x\,a_{\overline{8}|k}$, $k=\frac{i^{(4)}}{4}=0.0134752$

$\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4}=(1+i)=1.055$

$a_{\overline{8}|k}=7.5359013$

$\therefore$ $x=68.39579554$만원

문제 29번

답 474.924만원

풀이

매 분기 말 50만원씩 적립한 것의 10년 후 시점 가치= 5년간 매년 초 Y의 금액을 지급하는 확정연금 $\rightarrow$ $50s_{\overline{40}|j}=Y\,\ddot{a}_{\overline{5}|0.025}$

$$\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^4=(1+i)=1.025$$

$$j=\frac{i^{(4)}}{4}=0.0061922$$

$$s_{\overline{40}|j}=\frac{(1+j)^{40}-1}{j}=45.2314927$$

$$\ddot{a}_{\overline{5}|0.025}=4.7619742$$

$\therefore\ Y=474.9237$만원

문제 30번

답 0.099

풀이

$$1{,}000=120\left(a_{\overline{4}|0.035}+1.035^{-4}a_{\overline{8}|i}\right)$$

$$a_{\overline{4}|0.035}=3.6730792$$

$$\rightarrow\ a_{\overline{8}|i}=\frac{1-(1+i)^{-8}}{i}=5.3477488$$

$$\therefore i=0.0993410125$$

문제 31번

답 266,592.136

풀이

첫 지급액 A, 매기 D씩 지급액이 증가하는 기말 확정연금의 현가:

$$(Ia)_{\overline{n}|i}=Aa_{\overline{n}|i}+D\left(\frac{a_{\overline{n}|i}-nv^n}{i}\right)$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|i}=(Ia)_{\overline{n}|i}(1+i)$$

2014년 초 연금지급액의 현가: $(I\ddot{a})_{\overline{180}|j}=(Ia)_{\overline{180}|j}(1+j)$

$$j=\left(1+\frac{i^{(6)}}{6}\right)^{\frac{6}{12}}-1$$

$$(Ia)_{\overline{180}|j}(1+j)=\left[600a_{\overline{n}|j}-2\left(\frac{a_{\overline{180}|j}-nv^n}{j}\right)\right](1+j)=39{,}831.88371$$

$\therefore$ 지급액의 2030년 초 시점에서의 가치:

$$(Ia)_{\overline{180}|j}(1+j)(1+j)^{16\times 12}=266{,}592.1360$$

문제 32번

답 2.830

풀이

$\frac{1}{12}\ddot{s}_{\overline{20}|0.05}$ → 매월 $\frac{1}{12}$씩 연 이자율 0.05로 20년간 투자한 것의 20년 말 시점에서의 가치

$$1+i=\left(1-\frac{d^{(12)}}{12}\right)^{-12}=1.05$$

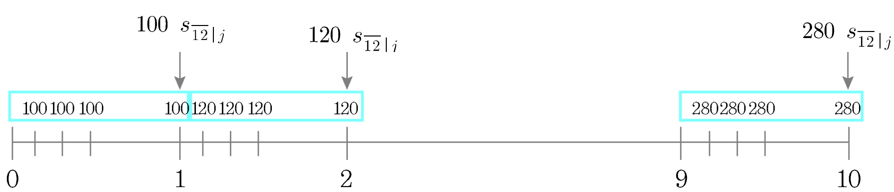
$$d^{(12)}=0.0486911$$

$$\therefore\ \frac{1}{12}\ddot{s}_{\overline{20}|0.05}=\frac{(1+i)^{20}-1}{d^{(12)}}=2.829567938$$

문제 33번

답 25,816만원

풀이



$$j=\frac{i^{(12)}}{12}=0.0024663$$

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}$$

첫 지급액 A, 매기 D씩 지급액이 증가하는 기말 확정연금의 미래가치:

$$(Is)_{\overline{n}|i}=As_{\overline{n}|i}+D\left(\frac{s_{\overline{n}|i}-n}{i}\right)$$

확정연금의 10년 후 시점에서의 미래가치:

$$(Is)_{\overline{10}|i}=100\ s_{\overline{12}|j}s_{\overline{10}|i}+20\ s_{\overline{12}|j}\left(\frac{s_{\overline{10}|i}-n}{i}\right)$$

$$s_{\overline{12}|j}=\frac{(1+j)^{12}-1}{j}=12.1641194$$

$$s_{\overline{10}|i}=\frac{(1+i)^{10}-1}{i}=11.4638793$$

∴ 확정연금의 10년 후 시점에서의 미래가치: $(Is)_{\overline{10}|i}=$ 25,816.00151만원

문제 34번

답 $X = 10.480$

풀이

연금 A: $4\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(4)} = \frac{4}{d^{(4)}} = 40$

$\rightarrow d^{(4)} = 0.1$

$1+i = \left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^4$

$\rightarrow i = 0.1065767$

연금 B: $X\left(\frac{1}{1-v^3}\right) = 40$

$\therefore X = 10.48006617$

문제 35번

답 해설 참조

풀이

(1) (pf) $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{m}}\right)$

$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + v^{\frac{3}{m}} \cdots + v^n\right)$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} \times v^{\frac{-1}{m}}$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} \times (1+i)^{\frac{1}{m}}$

(2) (pf) $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$

$s_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n \alpha_{\overline{n}|}^{(m)}$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} \times (1+i)^{\frac{1}{m}}$이므로 $(1+i)^n \times \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n \times a_{\overline{n}|}^{(m)} \times (1+i)^{\frac{1}{m}}$이다.

$\therefore \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = s_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^{\frac{1}{m}}$

문제 36번

답 3.896

풀이

철수가 구입한 연금의 현가$= 30 \cdot a_{\overline{\infty|}}$

영희가 구입한 연금의 현가$= S$

$$S = 40 \cdot v + 40 \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right) \cdot v^2 + 40 \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right)^2 \cdot v^3 + \cdots$$

$$S = 800 \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{100}}$$

철수와 영희는 같은 금액으로 연금을 구입했으므로 $30 \cdot a_{\overline{\infty|}} = S$이여야 한다.

$$30 \cdot a_{\overline{\infty|}} = \frac{30}{i} = \frac{3{,}000}{k}$$

$\therefore\ k = 3.8961038961$

문제 37번

답 6번

풀이

같은 시점에서 A와 B의 가치를 비교하기 위해 0시점에서의 현가를 비교하자.

$A = \ddot{a}_{\overline{n|}}$

$B = {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$

$\ddot{a}_{\overline{n|}} > {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$

$$\frac{1 - v^n}{d} > \frac{v^n}{d}$$

$$v^n < \frac{1}{2}$$

$$n > \frac{\ln 2}{\delta}$$

$$\delta = \ln 1 + i = \ln\left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4} = 0.121837$$

$n > 5.689143$

$\therefore\ n = 6$

문제 38번

답 5,902.726만원

풀이

2014년 말에 적립한 500만원에 대한 이자는 2015년 말부터 2023년 말까지 매년 18.5만원씩 생긴다. 이 이자를 연이율 3%로 재투자를 한다면 2023년 말에 평가한 재투자금은 $18.5 \cdot S_{\overline{9|}}$와 같다.

마찬가지의 방법으로 얻은 이자들을 재투자하였을 때 2023년 말 시점에서 계산한 미래 가치는 다음과 같다.

$$18.5 \cdot s_{\overline{9|}} + 18.5 \cdot s_{\overline{8|}} + \cdots + 18.5 = \frac{18.5}{0.03}\left(1.03^9 + 1.03^8 + \cdots + 1.03 - 9\right) = 902.7255754$$

적립금의 미래가치 = 5,000만원

재투자금의 미래가치 = 902.7255754만원

∴ 5,902.7255754만원

문제 39번

답 28.532

풀이

$$a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right) = (1+3t)^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{s}_{\overline{20|}} = \int_0^{20} \frac{a(20)}{a(t)} dt = \int_0^{20} \left(\frac{61}{1+3t}\right)^{\frac{1}{3}} dt = 28.53175141$$

문제 40번

답 1,319.957

풀이

$$30 \cdot (Da)_{\overline{10|}} = 30 \cdot \frac{10 - a_{\overline{10|}}}{0.06}$$

$$a_{\overline{10|}} = \frac{1 - 1.06^{-10}}{0.06} = 7.360087051$$

$$\therefore\ 30 \cdot (Da)_{\overline{10|}} = 1{,}319.956474$$

10년 동안 매년 말에 연금 지급을 받으며 첫 번째 해에는 300, 두 번째 해에는 270, 마지막 해에는 30으로 매년 30씩 작아지는 금액을 받는 연금을 말한다.

문제 41번

답 82,137.309

풀이

$$1{,}200 \cdot (Ia)^{(12)}_{\overline{10|}} = 1{,}200 \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{10|}} - 10 \cdot v^{10}}{i^{(12)}}$$

$$1+i = e^{0.06} = \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} = 1.061836547$$

$$\ddot{a}_{\overline{10|}} = \frac{1-v^{10}}{d} = 7.74765604$$

$$i^{(12)} = 0.06015025031$$

$$\therefore\ 1{,}200 \cdot (Ia)^{(12)}_{\overline{10|}} \cdot (1+i)^{10} = 82{,}137.30927$$

문제 42번

답 2,137.400

풀이

3년을 1기간으로 쳐서 계산했을 때 1기간당 이자를 i라 하면 i는 다음과 같다.

$1+i = (1-0.03)^{-3} = 1.095682682$

A = 매 3년마다 지급하는 영속연금의 현재가치

$A = 100 \cdot v + 110 \cdot v^2 + 120 \cdot v^3 + \cdots$

$A = 100 \cdot (v+v^2+v^3+\cdots) + 10 \cdot v \cdot (v+2v^2+3v^3+\cdots)$

$$\therefore\ A = 100 \cdot \frac{v}{1-v} + 10 \cdot v \cdot \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{10+100i}{i^2} = 2{,}137.399557$$

문제 43번

답 $\dfrac{1.05}{4}X^2$

풀이

$$X = 2 \cdot {}_{3|}\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = 2 \cdot v^3 \cdot \frac{1}{d}$$

첫 번째 지급액은 1, 이후 지급액은 1씩 증가하는 영속 연금의 현재가치를 S라 하면 S는 다음과 같다.

$$S = {}_{5|}(I\ddot{a})_{\overline{\infty|}} = v^5 \cdot \frac{1}{d^2}$$

$$\therefore\ S = X^2 \cdot \frac{1}{4v} = \frac{1.05}{4}X^2$$

문제 44번

답 1,386.087만원

풀이

처음 10번의 지급액의 현가$=A$

매년 5%씩 증가한 지급액의 현가$=B$

$A=100 \cdot a_{\overline{10|}}$

$B=100 \cdot 1.05^{1} \cdot 1.05^{-11}+100 \cdot 1.05^{2} \cdot 1.05^{-12}+\cdots+100 \cdot 1.05^{10} \cdot 1.05^{-20}$

$\quad =100 \cdot 1.05^{-10} \cdot 10$

$\therefore\ A+B=100 \cdot \dfrac{1-v^{10}}{i}+1000 \cdot v^{10}=1,386.086736$

문제 45번

답 0.0845

풀이

5년을 1기간으로 생각했을 때 1기간의 이자를 a라 한다면 영속연금의 현가는 다음과 같다.

$$100 \cdot \ddot{a}_{\overline{\infty|}}=\frac{100}{d}=\frac{100(1+a)}{a}=300$$

$a=0.5$

연이율을 i라 한다면 a와 i 사이의 관계식은 다음과 같다.

$(1+i)^{5}=1+a=1.5$

$\therefore\ i=0.0844717712$

문제 46번

답 10,220.012

풀이

1번째부터 10번째까지 지급한 지급액의 30년 후 누적가치 = A

11번째부터 20번째까지 지급한 지급액의 30년 후 누적가치 = B

$A=100 \cdot 1.07^{30}+100 \cdot 1.05^{1} \cdot 1.07^{29}+\cdots+100 \cdot 1.05^{9} \cdot 1.07^{21}$

$$A=\frac{100 \cdot 1.07^{30}\left(1-\left(\dfrac{1.05}{1.07}\right)^{10}\right)}{1-\dfrac{1.05}{1.07}}=7,002.865457$$

$B = 100 \cdot 1.05^9 \cdot 0.93 \cdot 1.07^{20} + 100 \cdot 1.05^9 \cdot 0.93^2 \cdot 1.07^{19} + \cdots$
$+ 100 \cdot 1.05^9 \cdot 0.93^{10} \cdot 1.07^{11}$

$$B = \frac{100 \cdot 1.05^9 \cdot 0.93 \cdot 1.07^{20}\left(1 - \left(\frac{0.93}{1.07}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{0.93}{1.07}} = 3{,}217.146318$$

$\therefore\ A + B = 10{,}220.01177$

문제 47번

답 풀이 생략

풀이

풀이 생략

문제 48번

답 $s_1 = 3.5\%,\ s_2 = 3.6998\%,\ s_3 = 3.8663\%$

풀이

$f_0 = s_1 = 3.5\%$

$(1+s_2)^2 = (1+f_0) \cdot (1+f_1) = 1.035 \cdot 1.039 = 1.0754$

$\therefore\ s_2 = 3.6998071\%$

$(1+s_3)^3 = (1+s_2)^2 \cdot (1+f_2) = 1.1205$

$\therefore\ s_3 = 3.8662707\%$

문제 49번

답 (1) 434.068
(2) 425.126
(3) 0.076

풀이

(1) 첫 지급액 100, 이후 지급액 50씩 증가하며 지급횟수가 3회인 기수불 확정연금의 현재가치

$$A = 100 + \frac{150}{1+s_1} + \frac{200}{(1+s_2)^2} = 434.068$$

(2) (1)에서 주어진 확정연금을 3년 후 시점부터 판매하는 경우, 선물이자율을 이용하여 해당 확정연금의 3년 후 시점에서의 가치 계산

$$100+\frac{150}{(1+f_{3,1})}+\frac{200}{(1+f_{3,2})^2}=425.12555$$

(3) 7년 후부터 3년간 적용되는 선물이자율 $f_{7,3}$을 구하시오.

$$1+f_{7,3}=\left(\frac{(1+s_{10})^{10}}{(1+s_7)^7}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1.055^{10}}{1.046^7}\right)^{\frac{1}{3}}=1.0763$$

$$\therefore\ f_{7,3}=0.0763$$

문제 50번

답 (1) 1,969.56

(2) 0.028

풀이

(1) 첫 지급액이 100이고 이후 지급액이 5%씩 증가하는 20년 만기 기말불 확정연금의 현재가치

$$A=100\cdot\frac{1}{1+s_1}+100\cdot 1.05\cdot\frac{1}{(1+s_2)^2}+\cdots+100\cdot 1.05^{19}\cdot\frac{1}{(1+s_{20})^{20}}$$

$$A=100\cdot\frac{1}{1.035^{0.7}}+100\cdot 1.05\cdot\frac{1}{1.035^{1.5}}+\cdots+100\cdot 1.05^{19}\cdot\frac{1}{1.035^{33}}$$

$$=1,969.56$$

(2) 앞으로 3년간 적용되는 현물이자율s_3

$$(1+s_t)^t=1.035^{0.05t^2+0.65t}$$

$$(1+s_3)^3=1.035^{0.05\cdot 3^2+0.65\cdot 3}=1.035^{2.4}$$

$$\therefore\ s_3=0.027903346$$

1장 생존분포와 생명표

문제 1번

답 (1) 991.391

(2) 8.628

(3) 8.647

풀이

(1) *UDD* 가정을 적용하여 $1{,}000 \times {}_{0.7}p_{[60]+0.8}$을 구하시오.

UDD 가정은 한 해 동안의 사망자가 1년 내의 기간 동안 고르게 분포한 것을 의미한다.

$${}_{0.7}q_{[60]+0.8} = {}_{0.2}q_{[60]+0.8} + {}_{0.2}p_{[60]+0.8} \times {}_{0.5}q_{[60]+1}$$

$$= \frac{0.2 \times q_{[60]}}{1-0.8 \times q_{[60]}} + (1 - {}_{0.2}q_{[60]+0.8}) \times 0.5 \times q_{[60]+1} \quad \left(\because {}_{s}q_{x+t} = \frac{s \times q_x}{1-t \times q_x} \right)$$

$$q_{[60]} = \frac{l_{[60]} - l_{[60]+1}}{l_{[60]}} = \frac{80{,}625 - 79{,}954}{80{,}625} = 0.0083$$

$$q_{[60]+1} = \frac{l_{[60]+1} - l_{[60]+2}}{l_{[60]+1}} = \frac{79{,}954 - 78{,}839}{79{,}954} = 0.0139$$

$${}_{0.7}q_{[60]+0.8} = \frac{0.2 \times 0.0083}{1-0.8 \times 0.0083} + \left(1 - \frac{0.2 \times 0.0083}{1-0.8 \times 0.0083}\right) \times 0.5 \times 0.0139 = 0.0086$$

$$1{,}000 \times {}_{0.7}q_{[60]+0.8} = 8.6093$$

$$1{,}000 \times (1 - {}_{0.7}q_{[60]+0.8}) = 1{,}000 - 8.6093$$

$$1{,}000 \times {}_{0.7}p_{[60]+0.8} = 991.3907$$

(2) 상수사력 가정을 적용하여 $1{,}000 \times {}_{0.7}q_{[60]+0.8}$을 구하시오.

소수연령에서 사력이 상수임을 가정한다.

$${}_{t}p_x = (p_x)^t \ \ (0 < t < 1)$$

$$e^{t \times \ln(p_x)} = e^{-t \times (-\ln(p_x))} = e^{-t \times \mu(x)}$$

$${}_{0.7}q_{[60]+0.8} = 1 - {}_{0.7}p_{[60]+0.8}$$

$${}_{0.7}p_{[60]+0.8} = {}_{0.2}p_{[60]+0.8} \times {}_{0.5}p_{[60]+1}$$

$$(p_{[60]})^{0.2} \times (p_{[60]+1})^{0.5} = 0.9917^{0.2} \times 0.9861^{0.5} = 0.9914$$

$${}_{0.7}q_{[60]+0.8} = 0.0086$$

$$1{,}000 \times {}_{0.7}q_{[60]+0.8} = 8.6282$$

(3) *Balducci* 가정을 적용하여 $1{,}000 \times {}_{0.7}q_{[60]+0.8}$을 구하시오.

생존함수 역수의 내분 값으로 소수연령에서의 생존함수를 근사한다.

$${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t) \times q_x$$

$${}_{t}q_x = \frac{t \times q_x}{1-(1-t)q_x}$$

$${}_{0.7}q_{[60]+0.8} = {}_{0.2}q_{[60]+0.8} \times {}_{0.2|0.5}q_{[60]+0.8}$$

$${}_{0.7}q_{[60]+0.8} = {}_{0.2}q_{[60]+0.8} \times {}_{0.2}p_{[60]+0.8} \times {}_{0.5}q_{[60]+1}$$

$$= {}_{0.2}q_{[60]} + (1 - {}_{0.2}q_{[60]})\, {}_{0.5}q_{[60]+1}$$

$$=0.2\times q_{[60]}+\left(1-0.2\times q_{[60]}\right)\times\frac{0.5\times q_{[60]+1}}{1-0.5\times q_{[60]+1}}$$

$$0.2\times 0.0083+(1-0.2\times 0.0083)\times\frac{0.5\times 0.0139}{1-0.5\times 0.0139}=8.6470$$

문제 2번

답 (1) $\exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x-1)\right)$

(2) $\exp\left(-\frac{k}{(n+1)}\times x^{n+1}\right)$

(3) $\left(\frac{b}{b+x}\right)^a$

풀이

(1) $\mu_x=Bc^x\quad (B>0\ ,\ c\ >1)$

$$S(x)={}_xp_0=\exp\left(-\int_0^x Bc^y dy\right)$$
$$=\exp\left(-B\int_0^x c^y dy\right)$$
$$=\exp\left(-B\cdot\frac{1}{\ln c}\left[c^y\right]_0^x\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x-1)\right)$$

(2) $\mu_x=k\times x^n\ \ (n>0\ ,\ k>0)$

$$S(x)={}_xp_0=\exp\left(-\int_0^x ky^n dy\right)$$
$$=\exp\left(-k\left[\frac{1}{(n+1)}\quad\times y^{n+1}\right]_0^x\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{k}{(n+1)}\times x^{n+1}\right)$$

(3) $\mu_x=a(b+x)^{-1}\ \ (a>0\ ,\ b>0)$

$$S(x)={}_xp_0=\exp\left(-\int_0^x a(b+y)^{-1}dy\right)$$
$$=\exp(-a[\ln(b+y)]_0^x)$$
$$=\exp(-a\ln(b+x)+a\ln b)$$
$$=\left(\frac{b}{b+x}\right)^a$$

문제 3번

답 1,436.19

풀이

$\Pr(Y_A+Y_B>c)=0.05$

확률 계산을 위해 표준정규확률분포로 바꿔준다.

$$\Pr\left(z>\frac{c-E[Y_A+Y_B]}{\sqrt{Var[Y_A+Y_B]}}\right)=0.05$$

$Y_A \sim B(1{,}600,\ {}_{70}p_0)$, $Y_B \sim B(540,\ {}_{60}p_{10})$

$$ {}_{70}p_0=\frac{l_{70}}{l_0}=\frac{26}{40},\quad {}_{60}p_{10}=\frac{l_{70}}{l_{10}}=\frac{26}{39}$$

$$E[Y_A]=1{,}600\times\frac{26}{40}=1{,}040,\ E[Y_B]=540\times\frac{26}{39}=360$$

$E[Y_A+Y_B]=E[Y_A]+E[Y_B]=1{,}040+360=1{,}400$

$$Var[Y_A]=1{,}600\times\frac{26}{40}\times\frac{14}{40}=364,\ Var[Y_B]=540\times\frac{26}{39}\times\frac{13}{39}=120$$

$Cov(Y_A,\ Y_B)=0$ (∵ 모든 구성원의 장래생존기간은 독립임을 가정한다.)

$Var[Y_A+Y_B]=Var[Y_A]+Var[Y_B]+2Cov(Y_A,\ Y_B)=364+120+0=484$

$$\frac{c-E[Y_A+Y_B]}{\sqrt{Var[Y_A+Y_B]}}=1.645$$

$c=1.645\times\sqrt{Var[Y_A+Y_B]}+E[Y_A+Y_B]$

$\quad=1.645\times\sqrt{484}+1{,}400=1{,}436.19$

문제 4번

답 해설 참조

풀이

(a) (pf) $E[K^*(x)]=0\times q_x+1\times{}_{1|}q_x+2\times{}_{2|}q_x+\cdots+n-1\times{}_{n-1|}q_x+n\times{}_np_x$

$\quad=p_x-{}_2p_x+2({}_2p_x-{}_3p_x)+\cdots+n-1\times({}_{n-1}p_x-{}_np_x)+n\times{}_np_x$

$\quad=p_x+{}_2p_x+\cdots+{}_{n-1}p_x+{}_np_x$

$\quad=\sum_{k=1}^{n}{}_kp_x$

(b) (pf) $Var[K^*(x)]=E[K^*(x)^2]-E[K^*(x)]^2$

$E[K^*(x)^2]=0^2\times q_x+1^2\times{}_{1|}q_x+2^2\times{}_{2|}q_x+\cdots+(n-1)^2\times{}_{n-1|}q_x+n^2\times{}_nq_x$

$\quad=p_x-{}_2p_x+2^2\times({}_2p_x-{}_3p_x)+\cdots+(n-1)^2\times({}_{n-1}p_x-{}_np_x)+n^2\times{}_np_x$

$$= p_x + 3 \times {}_2p_x + \cdots + (2n-3) \times {}_{n-1}p_x + (2n-1) \times {}_np_x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\, {}_kp_x$$

$$Var[K^*(x)] = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\, {}_kp_x - \left(\sum_{k=1}^{n} {}_kp_x \right)^2$$

$$Var[K^*(x)] = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\, {}_kp_x - \left(e_{x:\overline{n}|} \right)^2$$

문제 5번

답 (1) $\frac{1}{c}$

(2) $-\frac{1}{c} \times \ln 0.5$

(3) 0

풀이

(1) $Var[T(x)] = E[T(x)^2] - \{E[T(x)]\}^2$

$$E[T(x)] = \int_0^\infty t f_T(t)\,dt = \int_0^\infty tce^{-ct}\,dt = c\int_0^\infty te^{-ct}\,dt = c\frac{\Gamma(2)}{c^2}\int_0^\infty te^{-ct}\frac{c^2}{\Gamma(2)}\,dt$$

$$= \frac{1}{c}$$

$$E[T(x)^2] = \int_0^\infty t^2 f_T(t)\,dt = \int_0^\infty t^2 ce^{-ct}\,dt = c\int_0^\infty t^2 e^{-ct}\,dt$$

$$= c\frac{\Gamma(3)}{c^3}\int_0^\infty \frac{c^3}{\Gamma(3)} t^2 e^{-ct}\,dt = \frac{2!}{c^2} = \frac{2}{c^2}$$

$$Var[T(x)] = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2}$$

(2) $T(x)$ 중앙값, $F_T(t) = 0.5$의 를 만족하는 t값

$$F_T(t) = \int_0^t f(s)\,ds \; = \int_0^t ce^{-cs}\,ds \; = c\int_0^t e^{-cs}\,ds \; = 1 - e^{-ct}$$

$$1 - e^{-ct} = 0.5 \rightarrow e^{-ct} = 0.5 \rightarrow \ln 0.5 = -ct \rightarrow t = -\frac{\ln 0.5}{c}$$

(3) $T(x)$의 최빈값

지수분포 특성상, 0에서 가장 확률밀도함수 값이 높으므로 정답은 0이다.

문제 6번

답 0.241

풀이

현 80세는 세번째 해에 사망, 현 90세는 그 첫번째 혹은 두번째 해에 사망

$$
\begin{aligned}
{}_{2|}p_{80} \times {}_{2}p_{90} &= {}_{2}p_{80+2} \times (1 - {}_{2}p_{90}) \\
&= p_{80} \times p_{80+1} \times q_{80+2} \times (1 - p_{90} \times p_{90+1}) \\
&= 0.9 \times 0.8 \times 0.3 \times (1 - 0.6 \times 0.5) \\
&= 0.1512
\end{aligned}
$$

현 90세는 세번째 해에 사망, 현 80세는 그 첫번째 혹은 두번째 해에 사망

$$
\begin{aligned}
{}_{2|}q_{90} \times {}_{3}q_{80} &= {}_{2}p_{90} \times q_{90+2} \times (1 - {}_{2}q_{80}) \\
&= p_{90} \times p_{90+1} \times q_{90+2} \times (1 - p_{80} \times p_{80+1}) \\
&= 0.6 \times 0.5 \times 0.6 \times (1 - 0.9 \times 0.8) \\
&= 0.0504
\end{aligned}
$$

현 80, 90세 둘 다 세번째 해에 사망

$$ {}_{2|}q_{80} \times {}_{2|}q_{90} = {}_{2}p_{80} \times q_{80+2} \times {}_{2}p_{90} \times q_{90+2} = 0.261 \times 0.18 = 0.03888 $$

세 경우가 상호 배반(mutually exclusive)이므로 마지막 사망이 세번째 해에 발생할 확률은

$$ 0.1512 + 0.0504 + 0.03888 = 0.24048 $$

문제 7번

답 UDD: 116.719, 상수사력: 116.652

풀이

$$ {}_{2|3}q_{[60]+0.75} = {}_{0.25}p_{[60]+0.75} \times p_{[60]+1} \times {}_{0.75}p_{[60]+2} \times {}_{3}q_{[60]+2.75} \text{ or} $$

$$ {}_{2|3}q_{[60]+0.75} = {}_{2}p_{[60]+0.75} - {}_{5}p_{[60]+0.75} $$

*UDD*일 때,

$$ {}_{2|3}q_{[60]+0.75} = \frac{l_{[60]+2.75}}{l_{[60]+0.75}} - \frac{l_{[60]+5.75}}{l_{[60]+0.75}} = \frac{74,750}{79,250} - \frac{65,500}{79,250} = \frac{9,250}{79,250} = 0.116719 $$

$$ 1,000 \times {}_{2|3}q_{[60]+0.75} = 116.719 $$

상수사력일 때,

$$
\begin{aligned}
{}_{2|3}q_{[60]+0.75} &= \frac{l_{[60]+2} \times (p_{[60]+2})^{0.75}}{l_{[60]} \times (p_{[60]})^{0.75}} - \frac{l_{65} \times (p_{65})^{0.75}}{l_{[60]} \times (p_{[60]})^{0.75}} \\
&= \frac{74,738.860}{79,248.822} - \frac{65,494.322}{79,248.822} \\
&= \frac{9,244.528}{79,248.822} = 0.116652
\end{aligned}
$$

$$1{,}000 \times {}_{2|3}q_{[60]+0.75} = 116.652$$

문제 8번

답 2.479

풀이

$$ {}_tp_{65} = \frac{s_0(65+t)}{s_0(65)} = \left[\frac{w-(t+65)}{w-65}\right]^{\frac{1}{4}} $$

$$ {}_tp_{65} = 1 - \left[\frac{w-(t+65)}{w-65}\right]^{\frac{1}{4}} $$

$$ \mu_{65+t} = \frac{\frac{d_tq_{65}}{dt}}{{}_tp_{65}} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{w-65}\times\left[\frac{w-(t+65)}{w-65}\right]^{-\frac{3}{4}}}{\left[\frac{w-(t+65)}{w-65}\right]^{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{w-65}}{\frac{w-(t+65)}{w-65}} $$

t에 0을 대입하면

$$ \mu_{65} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{w-65} = \frac{1}{180} $$

$$ w = 110 $$

$$ e_{106} = {}_1p_{106} + {}_2p_{106} + {}_3p_{106} $$

$$ = \left[\frac{110-(1+106)}{110-106}\right]^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{110-(2+106)}{110-106}\right]^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{110-(3+106)}{110-106}\right]^{\frac{1}{4}} $$

$$ = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{2}{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 2.4786 $$

문제 9번

답 98,049.52

풀이

선택기간이 2년이므로

$$ l_{[75]+2} = l_{77} $$

$$ l_{[75]+1} \times p_{[75]+1} = l_{77} $$

$$ p_{[75]+1} = 1 - q_{[75]+1} = 1 - 0.95\times q_{76} = 1 - 0.95\times(1-p_{76}) $$

$$ = 1 - 0.95\times\left(1-\frac{l_{77}}{l_{76}}\right) = 1 - 0.95\times\left(1-\frac{96{,}124}{98{,}153}\right) $$

$$ = 0.980362 $$

$$l_{[75]+1} = \frac{l_{77}}{p_{[75]+1}} = 98{,}049.52$$

문제 10번

답 18.620

풀이

$$e_{x+0.75} = p_{x+0.75} = (1+e_{x+1.75})$$

$$e_{x+0.75} = p_{x+0.75}(1+18.5)$$

$$p_{x+0.75} = {}_{0.25}p_{x+0.75} \times {}_{0.75}p_{x+1}$$

$${}_{0.25}p_{x+0.75} = (1-{}_{0.25}q_{x+0.75}) = \left(1-\frac{0.25\times q_x}{1\ \ -0.75\times q_x}\right) = 0.9923$$

$${}_{0.75}p_{x+1} = (p_{x+1})^{0.75} = (0.95)^{0.75} = 0.9623$$

$$p_{x+0.75} = {}_{0.25}p_{x+0.75} \times {}_{0.75}p_{x+1} = 0.9923\times 0.9623 = 0.9549$$

$$\therefore\ e_{x+0.75} = 0.9549\times 19.5 = 18.62$$

문제 11번

답 0.583

풀이

$${}_2q_{92}^{*} = 1-{}_2p_{92}^{*}$$

$${}_2q_{92}^{*} = \exp\left(-\int_0^2 \mu_{92+s}^{*}ds\right) = \exp\left(-\int_0^2 (2.5\times \mu_{92+s})ds\right)$$

$$= \left[\exp\left(-\int_0^2 \mu_{92+s}ds\right)\right]^{2.5} = \left({}_2p_{92}\right)^{2.5}$$

$${}_2p_{92} = (1-0.13)\times(1-0.19) = 0.7047$$

$${}_2p_{92}^{*} = (0.7047)^{2.5} = 0.416879634$$

$$\therefore\ {}_2q_{92}^{*} = 1-0.416879634 = 0.583120366$$

문제 12번

답 0.02

풀이

$$S(x) = 1-F(x) = \frac{1}{x+1} = {}_xp_0$$

$${}_xp_0 = \exp\left(-\int_0^x \mu(y)\,dy\right) = \frac{1}{x+1}$$

양변에 log를 취하면, $-\int_0^x \mu(y)dy = -\ln(x+1)$

양변을 x에 대해 미분하면, $\mu(x) = \frac{1}{x+1}$. $\therefore\ \mu(49) = \frac{1}{50}$

문제 13번

답 14.574

풀이

$$\left(\dot{e}_{35:\overline{24|}}\right)^2 = \int_0^{24} {}_tp_{35}dt$$

$$\int_0^5 {}_tp_{35}dt + \int_5^{24} {}_tp_{35}dt = \int_0^5 {}_tp_{35}dt + \int_0^{19} {}_{t+5}p_{35}dt = \int_0^5 {}_tp_{35}dt + {}_5p_{35} \times \int_0^{19} {}_tp_{40}dt$$

$$\int_0^5 e^{-0.04t}dt + e^{-0.04\times 5} \times \int_0^{19} e^{-0.05t}dt = \frac{1-e^{-0.04\times 5}}{0.04} + e^{-0.04\times 5} \times \frac{1-e^{-0.05\times 19}}{0.05}$$
$$= 14.57361085$$

문제 14번

답 0.282

풀이

$${}_{5|10}q_{50} = {}_5p_{50} - {}_{15}p_{50} = {}_5p_{50} - {}_{10}p_{50} \times {}_5p_{60} = e^{-0.05\times 5} - e^{-0.05\times 10} \times e^{-0.04\times 5}$$
$$= 0.282215479.$$

문제 15번

답 0.75

풀이

$${}_tp_0 = \begin{cases} e^{-\mu_1 t}, & 0 \le t < 5 \\ e^{-\mu_1\times 5 - \mu_2 \times (t-5)}, & 5 \le t \end{cases}$$

$${}_{5|5}q_0 = {}_5p_0 - {}_{10}p_0 = e^{-\mu_1\times 5} - e^{-\mu_1\times 5 - \mu_2\times 5} = e^{-\mu_1\times 5} - 0.869358 = 0.072406$$

$\mu_1 = 0.012$

$${}_{10}p_0 = e^{-0.012\times 5 - \mu_2 \times 5} = 0.869358$$

$$-0.012\times 5 - \mu_2 \times 5 = \ln(0.869358)$$

$\mu_2 = 0.016$

$\therefore \ \dfrac{\mu_1}{\mu_2} = \dfrac{0.012}{0.016} = 0.75$

문제 16번

답 0.00268

풀이

$\dot{e}_{[37]} = \dot{e}_{[37]:\overline{2}|} + {}_2p_{[37]} \times \dot{e}_{39}$

$58 = 1.9 + {}_2p_{[37]} \times \dot{e}_{39}$

$56.1 = {}_2p_{[37]} \times \dot{e}_{39}$

$\dot{e}_{37} = \dot{e}_{37:\overline{2}|} + {}_2p_{37} \times \dot{e}_{39}$

$57.5 = 1.7 + {}_2p_{37} \times \dot{e}_{39}$

$55.8 = {}_2p_{37} \times \dot{e}_{39}$

$\dfrac{{}_2p_{[37]} \times \dot{e}_{39}}{{}_2p_{37} \times \dot{e}_{39}} = \dfrac{56.1}{55.8} = 1.005376344$

$\mu_{[37]+t} + A = \mu_{37+t}$이므로 $e^{2A} = 1.005376344.$

$2A = \ln(1.005376344)$

$\therefore \ A = 0.002680972.$

문제 17번

답 해설 참조

풀이

(1) $\dot{e}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt + \int_n^\infty n \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt$

$= \int_0^n t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt + n \cdot {}_np_x$

$= -t \cdot {}_tp_x \Big|_0^n + \int_0^n {}_tp_x dt + n \cdot {}_np_x = \int_0^n {}_np_x dt$

$= \int_0^n \dfrac{l_{x+t}}{l_x}dt = \dfrac{1}{l_x}\left[\int_0^\infty l_{x+t}dt - \int_n^\infty l_{x+t}dt\right] = \dfrac{1}{l_x} \cdot [T_x - T_{x+n}].$

(2) $Var[T^*(x)] = E[(\min(T_x,n))^2] - E[\min(T_x,n)]^2$

$= E[(\min(T_x,n))^2] - (\dot{e}_{x:\overline{n}|})^2$

$$E\left[(\min(T_x,n))^2\right]=\int_0^n t^2\cdot {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt+n^2\cdot {}_np_x$$

$$=-t^2\cdot {}_tp_x\Big|_0^n+\int_0^n 2t\cdot {}_tp_x dt+n^2\cdot {}_np_x$$

$$=-n^2\cdot {}_np_x+\int_0^n 2t\cdot {}_tp_x dt+n^2\cdot {}_np_x=\int_0^n 2t\cdot {}_tp_x dt.$$

$$\therefore\ E\left[(\min(T_x,n))^2\right]-\left(\mathring{e}_{x:\overline{n|}}\right)^2=2\int_0^n t\cdot {}_tp_x dt-\left(\mathring{e}_{x:\overline{n|}}\right)^2$$

문제 18번

답 −23.500

풀이

$\mu_x^{kim}=0.00025\times 1.03^x$

$\mu_x^{son}=0.0005\times 1.03^x$

모든 연령 x에 대해, μ_x^{son}은 μ_{x+k}^{kim}로 나타낼 수 있으므로,

$\mu_x^{son}=\mu_{x+k}^{kim}$, $0.00025\times 1.03^x=0.0005\times 1.03^{x+k}$

$1.03^x=2\cdot 1.03^x\cdot 1.03^k$

$0.5=1.03^k$

$\therefore\ k=\dfrac{\ln(0.5)}{\ln(1.03)}=-23.49977225.$

문제 19번

답 $\exp\left(-A-B\cdot c^x\cdot\dfrac{c-1}{\ln(c)}\right)$

풀이

$${}_tp_x=\int_t^\infty {}_sp_x\mu_{x+s}ds$$

$$\int_1^\infty {}_tp_x\mu_{x+t}dt=p_x$$

$${}_tp_x=\exp\left(-\int_0^t\mu_{x+s}ds\right)=\exp\left(-\int_0^t(A+B\cdot c^{x+s})ds\right)$$

$$=\exp\left(-\int_0^t Ads-B\cdot c^x\int_0^t c^s ds\right)=\exp\left(-A\cdot t-B\cdot c^x\cdot\frac{c^t-1}{\ln c}\right)$$

$$\therefore\int_1^\infty {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt=p_x=\exp\left(-A-B\cdot c^x\cdot\frac{c-1}{\ln(c)}\right)$$