creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

碩士學位 請求論文
指導教授 金 世 基

종속 생존기간 모델
Common Shock Models의 변형

成均館大學校 大學院

保險計理學科

保險計理學專攻

白 惠 妍

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

碩士學位 請求論文
指導敎授 金 世 基

종속 생존기간 모델
Common Shock Models의 변형
Modification of Common Shock Models

成均館大學校 大學院

保險計理學科

保險計理學專攻

白　惠　姸

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

碩士學位 請求論文
指導敎授 金 世 基

종속 생존기간 모델 Common Shock Models의 변형

Modification of Common Shock Models

이 論文을 保險計理學 碩士學位 請求論文으로 提出합니다.

2008 年 12 月 日

成均館大學校 大學院
保險計理學科
保險計理學專攻

白 惠 姸

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

이 論文을 白 惠 姸의 保險計理學

碩士學位 論文으로 認定함.

2008 年　　12 月　　　日

審査委員長	(印)
審査委員	(印)
審査委員	(印)

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<목 차>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<표목차>

<그림목차>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

논문요약

종속 생존기간 모델 중 Common Shock Models의 변형

일반적으로 T(x)와 T(y)에 대한 결합분포에 대하여 계산상의 편리함을 위해 T(x)와 T(y)가 주로 독립인 경우를 고려하곤 한다. 하지만, T(x)와 T(y)가 독립이 아닌 경우에는 하나의 종속생존기간 모델(Dependent Lifetime Models)을 도입하여 결합분포를 설명해야만 한다. Common Shock 확률변수 Z는 2인(또는 다수)의 생존자가 동시에 사망하는 확률을 구하기 위하여 도입되었다. 이 확률변수는 홍수나 지진, 전염병과 같은 자연 재난 시 발생할 수 있는 다수의 사망 가능성을 위하여 만들어 졌다. 이 논문은 종속생존기간 모델 중 Common Shock Model에 대해서 소개한 후 생존모델들 중 동일사력법칙, Gompertz 법칙, de Moivre 법칙을 각각 적용하였을 때 모델의 공식을 유도할 것이다. 또한 common shock 확률변수 z가 지수분포 외에 gamma 분포, weibull 분포, lognormal 분포일 때 위의 세 가지 생존모델과 각각 매치시켜 일반적으로 Bowers의 Actuarial Mathematics 책에 제시되어진 Common Shock Model의 공식 외에 다른 공식들을 제시하고, 그 공식들로부터 생존확률들을 각각 구해 그 값들을 비교해보자 한다.

주제어 : 종속 생존기간 모델 , 생존함수 , 사력, Common Shock Model , force of mortality

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

제1장 서 론

1. 연구목적과 연구방법론

가. 연구목적

전통적으로 보험계리 이론상에서 두 사람 이상의 장래 생존기간에 대한 결합분포에 관한 보험료를 계산할 때는 독립관계(independence) 가정을 전제로 하였다. 독립을 가정하는 이유들 중 하나는 계산의 편이함을 꼽을 수 있다. 수학 또는 통계학에서 종속관계의 변수들은 대게 다루기 어렵거나 혹은 까다롭기 때문에 계산상의 편리함을 위해 종속관계 보다는 독립관계를 더 자주 가정했던 것이다. 하지만, 이러한 가정은 현실성이 떨어질 수 있으며, 때로는 연금(annuities), 보험(insurance)등의 보험료가 잘못 책정되는 원인이 될 수도 있다. 특히 보험료가 표준 가격 이상 또는 이하로 책정되어지는 현상은 생존기간의 결합분포에 대하여 독립관계를 가정하였기 때문에 발생할 수 있는 일이다.

예를 들어, Parkes, Benjamin 그리고 Fitzgerald (1969)는 부인을 먼저 잃은 55세의 4486명의 남편을 대상으로 일정기간 동안 살펴본 결과 그들의 부인이 죽고 처음 몇 달 동안에 남편들이 사망할 확률이 40% 증가함을 확인하였다.[1] 이와 같은 현상을 “broken heart syndrome”이라 하는데 개인의 사망률이 결혼여부에 따라 영향을 받을 수 있음을 많은 연구를 통해 밝혀지고 있다. 특히 부부들은 같은 사회계급에

1) Dependency of Risks in Annuity Valuation by Wah-yan Stephanie Shek

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

속해있고, 또한 같은 라이프스타일을 가지고 있기 때문에 그들의 생존기간에는 독립적인 관계를 이루고 있다기 보다는 종속관계가 있음을 보여주는 증거들이 많이 존재한다. 1988년에 Marshal과 Olkin은 개개인의 삶에 공통적으로 영향을 끼칠 수 있는 외생적인 사건들로 인해 그들의 생존기간의 결합분포가 종속관계를 띠고 있는 것을 설명하기 위해 Common Shock Model를 제시하였다. 현실에서는 이론에서와 달리 결합분포 상에서 독립관계보다는 종속관계의 형태를 더 많이 띠고 있는 것이 대부분이기 때문에 어떤 사건이나 결과를 정확하게 예측하고 오차를 줄이기 위해서는 결합분포 상의 종속관계에 대해 연구하는 것이 중요하다. 특히 보험회사에서 보험, 또는 연금 관련 계산을 위해서 보험료와 보험금등을 정확하게 예측하기 위해선 종속관계를 가정한 계산과 예측이 보험회사의 리스크 관리를 위해서도 중요하기 때문에 앞으로 이 논문에서는 그러한 종속관계를 가정했을 때 사용할 수 있는 모델들을 제시해보고자 한다.

나. 연구방법론

최근에 많은 학자들이 보험료 비율을 정하는데 있어서 피보험자들 사이에서 가능한 종속관계의 영향을 연구 하고 있다. 일부 학자들은 multivariate stochastic orderings에 기초하여 분석을 하고 있고, 또 일부의 학자들은 종속관계를 고려한 Copula Models를 사용하고 있다. 종속관계를 전제로 하는 두 사람이상의 생존기간의 결합분포를 위한 가장 기본적인 모델은 Common Shock Models이라 할 수 있다. 이 모델은 개개인의 삶에 공통적으로 영향을 줄 수 있는 자연 재앙과 같은 거대한 사건이 일어났을 때를 주로 가정하여 사용되어진다. 하지만 이 모델의 단점이라면 이 모델에서 가정되어지는 common shocks가 개개인의 삶들 간에 종속관계의 형태를 띠는 사건들의 종류를 전부 다 설명할 수는 없다는 것이다. Bowers의 Actuarial Mathematics 책에선 결합생존 상태(joint-life status)와 최종 생존자 상태

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

(last-survivor status) 에서 종속관계를 Common Shock Models와 Copula Models를 사용하여 소개되어지고 있다. 이외에도 Frailty Models, Markov Models등이 많은 논문들에서 사용되어지고 있다. 앞으로는 이 논문을 통해 종속 생존기간 모델들(dependent lifetimes models) 중 특히 Common Shock Models에 여러 가지 가정을 적용하여 기존에 Bowers의 Actuarial Mathematics책이나 manual들에 제시되어 있는 Common Shock Model의 공식과는 다른 좀 더 변형된 공식들을 제시하고, 그 공식들을 서로 비교해 보고자 한다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

제2장 Common Shock Models의 소개

1. Actuarial Functions on Two Dependent Lives

앞으로 Common Shock Models의 공식을 유도하기 위해 모델에서 주로 사용되는 몇 가지 변수와 함수에 대해 간략히 설명해보겠다. 보험수학에서 두 사람(또는 그 이상)의 생사에 의존한 보험 또는 연금 함수는 T(x) 와 T(y) 라는 변수를 사용한다. 여기서 두 변수, T(x)와 T(y),는 현재 x세인 사람의 future lifetime과 현재 y세인 사람의 future lifetime을 의미한다. 예를 들면,

$$ {}_t p_x = \Pr(\mathrm{T}(x) > t) \text{ and } {}_t p_y = \Pr(\mathrm{T}(y) > t) \tag{2.1} $$

으로 각각 x세와 y세의 사람이 앞으로 t년 이상 살 확률을 의미하는 것이다. 이와 비슷하게 변수 T(xy)는 (x)과 (y)의 결합생존 상태(joint lifetime)를 의미한다. 예를 들어 (x)와 (y) 둘 다 살아 있을 때는 (x)과 (y) 중 첫 번째 사망자가 발생할 때까지의 시간을 의미한다. 따라서

$$ \mathrm{T(xy)=min\{T(x),T(y)\}} \tag{2.2} $$

라고 쓸 수 있는 것이다. 그리고 결합생존 상태(joint-life status)의 생존 확률 ${}_t p_{xy}$ 은

$$ {}_t p_{xy} = \Pr(T(xy) > t) = \Pr(T(x) > t, T(y) > t) \tag{2.3} $$

이며, (x)와 (y) 중 첫 번째 사망자가 발생할 때까지의 시간이 t이상 될 확률을 의미하는 것이다. 또한 이 변수들의 누적분포 함수(cumulative distribution function)는 다음과 같다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

$$F_{T(xy)}(t) = \Pr(T(xy) \le t) = \Pr[\min\{T(x), T(y)\} \le t] = 1 - \Pr(T(x) > t, T(y) > t) \tag{2.4}$$

이것과 유사하게 변수 $T(\overline{xy})$ 는 (x)과 (y)의 최종 생존자 상태(last-survivor lifetime)를 의미한다. 예를 들어 (x)와 (y) 중 마지막 사망자가 나올 때까지의 시간은 (x), (y) 중 적어도 한명이 살아있을 시간을 의미한다. 따라서 최종 생존자 상태(last-survivor lifetime)는 다음과 같다.

$$T(\overline{xy}) = \max\{T(x), T(y)\} \tag{2.5}$$

그리고 최종 생존자 상태(last survivor status)의 생존 확률 ${}_t p_{\overline{xy}}$ 은

$${}_t p_{\overline{xy}} = \Pr(T(\overline{xy}) > t) = \Pr(T(x) > t \text{ or } T(y) > t) \tag{2.6}$$

이며, 또한 이 변수들의 누적분포 함수(cumulative distribution function)는 다음과 같다.

$$F_{T(\overline{xy})}(t) = \Pr(T(\overline{xy}) \le t) = \Pr[\max\{T(x), T(y)\} \le t] \tag{2.7}$$

보험과 연금 계산에서 v (discount factor)는 $(1+i)^{-1}$ [2]를 의미한다.

2. Common Shock Models의 정의

일반적으로 T(x)와 T(y)에 대한 결합분포에 대하여 계산상의 편리함을 위해 T(x)와 T(y)가 주로 독립인 경우를 고려했다. 하지만, T(x)와 T(y)가 독립이 아닌 경우에는 하나의 종속생존기간 모델(Dependent Lifetime Models)을 도입하여 결합분포를 설명한다. Common Shock 확률변수 Z는 2인(또는 다수)의 생존자가 동시에 사

2) i 는 annual effective rate

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

망하는 확률을 구하기 위하여 도입되었다. 이 확률변수는 자동차 사고나 홍수, 지진, 전염병과 같은 자연 재난 시 발생할 수 있는 다수의 사망 가능성을 위하여 만들어 졌다. $T^*(x)$와 $T^*(y)$를 Common Shock의 발생 가능성을 배제한 (x)과 (y)의 독립적 미래생존기간 확률변수들로 정의한다. 이 때, 이 확률변수 Z, $T^*(x)$, $T^*(y)$는 상호독립(mutually independent)인 관계가 성립한다. 이 모델에서 확률변수 Z는 z>0과 $\lambda \geq 0$ 일 때, $s_z(z) = e^{-\lambda z}$ 인 지수 분포를 가지는 확률 변수로 가정한다. (x)와 (y)가 Common Shock에 의한 사망 가능성을 포함하는 경우, T(x)와 T(y)는 각각

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^*(\mathrm{x}),\ \mathrm{T}^*(\mathrm{y})\text{: without common shock} \\
&\mathrm{T}(\mathrm{x})\text{: future lifetime of (x)} = \min\{\mathrm{T}^*(\mathrm{x}), \mathrm{Z}\} \\
&\mathrm{T}(\mathrm{y})\text{: future lifetime of (y)} = \min\{\mathrm{T}^*(\mathrm{y}), \mathrm{Z}\}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

이다. T(x)와 T(y)의 결합생존함수, 즉 Common Shock이나 다른 어떤 이유로 사망하지 아니하고 (x)가 시간 s까지 생존하고 (y)가 시간 t까지 생존할 확률은

$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{T(x)T(y)}}(s,t) &= \Pr\{\min(\mathrm{T}^*(\mathrm{x}), \mathrm{Z}) > s \ \cap\ \min(\mathrm{T}^*(\mathrm{y}), \mathrm{Z}) > t\} \\
&= \Pr\{(\mathrm{T}^*(\mathrm{x}) > s \ \cap\ \mathrm{Z} > s) \ \cap\ (\mathrm{T}^*(\mathrm{y}) > t \ \cap\ \mathrm{Z} > t)\} \\
&= \Pr\{\mathrm{T}^*(\mathrm{x}) > s \ \cap\ \mathrm{T}^*(\mathrm{y}) > t \ \cap\ \mathrm{Z} > \max(s,\ t)\} \\
&= s_{\mathrm{T}^*(\mathrm{x})}(s)\ \mathrm{s}_{\mathrm{T}^*(\mathrm{y})}(t)\ e^{-\frac{\max(s,\ t)}{\theta}}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

이며, T(x)와 T(y)의 결합 분포의 확률밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_{\mathrm{T(x)T(y)}}(s,\ t) = \frac{\partial^2}{\partial s\ \partial t} s_{\mathrm{T(x)T(y)}}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s\ \partial t} s_{\mathrm{T}^*(\mathrm{x})}(s)\ \mathrm{s}_{\mathrm{T}^*(\mathrm{y})}(t)\ e^{-\frac{\max(s,\ t)}{\theta}} \tag{2.3}$$

(x)와 (y)가 시간 t에서 동시에 사망하는 경우의 확률밀도 함수는

$$f_{\mathrm{T(x)T(y)}}(t,\ t) = \lambda\ e^{-\lambda t} s_{\mathrm{T}^*(\mathrm{x})}(t)\ \mathrm{s}_{\mathrm{T}^*(\mathrm{y})}(t) \tag{2.4}$$

이고, T(x)와 T(y)의 주변분포의 생존함수는 각각

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

$$s_{T(x)}(s) = s_{T^*(x)}(s)e^{-\lambda s},\ \ s_{T(y)}(t) = s_{T^*(y)}(t)e^{-\lambda t} \tag{2.5}$$

이다. 결합생존 상태(Joint-Life Status)의 생존함수는

$$_t p_{xy} = s_{T(xy)}(t) = s_{T(x)^*}(t) \cdot s_{T(y)^*}(t) \cdot e^{-\lambda t} \tag{2.6}$$

이며, 최종생존자 상태(Last-Survivor Status)의 생존함수는

$$_t p_{\overline{xy}} = s_{T(\overline{xy})}(t) = [s_{T(x)^*}(t) + s_{T(y)^*}(t) - s_{T(x)^* T(y)^*}(t,t)]\ e^{-\lambda t} \tag{2.7}$$

이다. 여기서 λ 가 0인 경우에는 T(x)와 T(y)가 서로 독립이다.

앞으로는 일반적으로 Common Shock Models에서 common shock 확률변수 z에 가정되어진 지수 분포(exponential distribution) 대신에 다른 분포들을 가정하여 대입해보겠다. 또한 사력(force of mortality)도 동일사력법칙(constant force of mortality) 가정 외에 Makeham 법칙, Gompertz 법칙 등을 사용하여 여러 가지 Common Shock Models 를 제시해보고자 한다.

제3장 Mortality Assumptions에 따른 Common Shock Models의 공식

1. 생존모델에 동일사력 법칙(Constant force of mortality)을 적용했을 경우의 공식

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

가. common shock 확률변수 z가 지수 분포(Exponential distribution)일 때

일반적으로 common shock 확률변수 z는 $T^*(x)$ 와 $T^*(y)$ 에 독립적이며, 지수분포(exponential distribution) 형태를 가지고 있다.

$$s_z(z)=e^{-\lambda z} \quad z>0,\ \lambda \ge 0 \tag{3.1}$$

또한 (x)과 (y)의 생존모델에 동일사력 법칙(constant force of mortality)을 가정한다면 common shock이 존재하지 않을 때의 각각의 생존함수는 다음과 같다.

$$_t p_x{}^* = e^{-\mu_x{}^* t} \quad _t p_y{}^* = e^{-\mu_y{}^* t} \tag{3.2}$$

$T^*(x), T^*(y)$ 은 common shock이 존재하지 않을 때 (x)와 (y)의 여명이므로, T(x)는 $\min\{T^*(x), Z\}$ 으로 common shock이 존재하지 않을 때의 여명과 common shock이 발생할 때까지의 시간 중에 작은 값을 의미하며, T(y)도 $\min\{T^*(y), Z\}$ 으로 위와 동일하다.

$(T(x),T(y))$ 결합생존 상태(Joint-Life Status)의 생존함수(survival function)는 식(2.6)이므로

$$_t p_{xy} = e^{-(\mu_x{}^* + \mu_y{}^* + \lambda)t} \tag{3.3}$$

이며, (x)와 (y) 각각 common shock이 존재하지 않을 때의 생존함수들의 곱에 common shock 확률변수 z의 생존함수를 곱한 값이 된다.

최종 생존자 상태(Last-Survivor Status)의 생존함수는

$$_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy} \tag{3.4}$$

이기 때문에 $e^{-(\mu_x{}^* + \lambda)t} + e^{-(\mu_y{}^* + \lambda)t} - e^{-(\mu_x{}^* + \mu_y{}^* + \lambda)t}$ 이 된다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

다음은 간단한 수치를 공식에 적용하여 생존확률을 살펴보도록 하겠다.

우선 (x)를 40세, (y)를 50세로 정하고 각각의 사력은 $\mu_x^* = 0.04,\ \mu_y^* = 0.06$ 이라 가정 하에 ${}_tp_x$, ${}_tp_y$, ${}_tp_{xy}$, ${}_tp_{\overline{xy}}$ 값들을 구해보도록 하겠다.

<표3-1> ${}_tp_x$

동일사력법칙, z가 지수 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.980	0.970	0.961	0.951
2	0.961	0.942	0.923	0.905
3	0.942	0.914	0.887	0.861
4	0.923	0.887	0.852	0.819
5	0.905	0.861	0.819	0.779
6	0.887	0.835	0.787	0.741
7	0.869	0.811	0.756	0.705
8	0.852	0.787	0.726	0.670
9	0.835	0.763	0.698	0.638
10	0.819	0.741	0.670	0.607
11	0.803	0.719	0.644	0.577
12	0.787	0.698	0.619	0.549
13	0.771	0.677	0.595	0.522

<표3-2> ${}_tp_y$

동일사력법칙, z가 지수 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.923	0.914	0.905	0.896
2	0.852	0.835	0.819	0.803
3	0.787	0.763	0.741	0.719
4	0.726	0.698	0.670	0.644
5	0.670	0.638	0.607	0.577
6	0.619	0.583	0.549	0.517
7	0.571	0.533	0.497	0.463
8	0.527	0.487	0.449	0.415
9	0.487	0.445	0.407	0.372
10	0.449	0.407	0.368	0.333
11	0.415	0.372	0.333	0.298
12	0.383	0.340	0.301	0.267
13	0.353	0.310	0.273	0.239

<표3-3> ${}_tp_{xy}$

동일사력법칙, z가 지수 분포 가정

	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.887	0.878	0.869	0.861
2	0.787	0.771	0.756	0.741
3	0.698	0.677	0.657	0.638
4	0.619	0.595	0.571	0.549

<표3-4> ${}_tp_{\overline{xy}}$

동일사력법칙, z가 지수 분포 가정

	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.978	0.968	0.959	0.949
2	0.952	0.934	0.915	0.897
3	0.924	0.897	0.870	0.845
4	0.894	0.859	0.825	0.793

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

5	0.549	0.522	0.497	0.472
6	0.487	0.458	0.432	0.407
7	0.432	0.403	0.375	0.350
8	0.383	0.353	0.326	0.301
9	0.340	0.310	0.284	0.259
10	0.301	0.273	0.247	0.223
11	0.267	0.239	0.214	0.192
12	0.237	0.210	0.186	0.165
13	0.210	0.185	0.162	0.142

5	0.862	0.820	0.780	0.742
6	0.830	0.781	0.736	0.693
7	0.797	0.743	0.692	0.646
8	0.763	0.705	0.650	0.600
9	0.730	0.667	0.610	0.557
10	0.697	0.631	0.571	0.516
11	0.664	0.595	0.533	0.478
12	0.633	0.561	0.498	0.441
13	0.602	0.528	0.464	0.407

나. common shock 확률변수 z가 Gamma 분포일 때

우선 앞에 변수 z가 지수 분포(exponential distribution)일 때와 비교하기 위해서 평균과 분산의 값을 동일하게 맞춘 후 gamma 분포의 생존 함수를 구해야 한다. gamma 분포의 평균값은 $\theta\alpha$ 이고, 분산 값은 $\theta^2\alpha$ 이다. 그리고 지수 분포(exponential distribution)의 평균값은 $\frac{1}{\lambda}$ 이고, 분산 값은 $\frac{1}{\lambda^2}$ 이다. 따라서

$$\left[\theta\alpha = \frac{1}{\lambda},\quad \theta^2\alpha = \frac{1}{\lambda^2}\right]$$

$$=> \quad (\theta\alpha)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \theta^2\alpha \quad => \quad \alpha=1,\ \theta = \frac{1}{\lambda} \qquad (3.5)$$

를 만족해야만 한다. gamma 분포에서 α=1 일 때는 지수 분포(exponential distribution)이므로 식(3.3), 식(3.4)과 동일한 생존함수를 갖게 되므로 Common Shock Model의 공식에 변화가 없다.

$${}_tp_{xy} = e^{-(\mu_x^* + \mu_y^* + \lambda)t} \quad , \quad {}_tp_{\overline{xy}} = e^{-(\mu_x^* + \lambda)t} + e^{-(\mu_y^* + \lambda)t} - e^{-(\mu_x^* + \mu_y^* + \lambda)t}$$

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

다. common shock 확률변수 z가 Weibull 분포일 때

common shock 확률변수 z가 weibull 분포를 띠고 있다고 가정하여 Common Shock Models를 새롭게 변형시켜 보겠다.

지수분포(exponential distribution)와 비교하기 위해 gamma 분포 적용 시와 동일한 방법으로, 평균값을 $\frac{1}{\lambda}$ 로 유지하고 분산 값을 $\frac{1}{\lambda^2}$ 로 동일하게 맞춘다. 지수분포(exponential distribution)의 평균과 분산 값을 동일하게 하기 위해선 weibull 분포에서 다음과 같은 가정이 필요하다.

$$mean = \theta\, \Gamma(1+\frac{1}{\tau}) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{var} = \theta^2 \left[\Gamma(1+\frac{2}{\tau}) - \left\{ \Gamma(1+\frac{1}{\tau}) \right\}^2 \right] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$=> \theta = \frac{1}{\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\lambda}\ , \quad \frac{\Gamma(1+\frac{2}{\tau})}{\left\{ \Gamma(1+\frac{1}{\tau}) \right\}^2} = 2 \tag{3.6}$$

식(3.6)을 만족시키는 값은 τ 가 1 이고, θ 가 $\frac{1}{\lambda}$ 이다. 따라서 common shock 확률변수 z의 생존함수 또한 지수분포(exponential distribution)를 적용했을 때와 동일한 형태를 갖게 되므로 식(3.3), 식(3.4)과 같다.

라. common shock 확률변수 z가 lognormal 분포일 때

이번에는 common shock 확률변수 z가 lognormal 분포를 띠고 있다고 가정하여 Common Shock Model의 공식을 유도해 보도록 하겠다.

lognormal 분포와 지수분포(exponential distribution)를 비교하기 위해 gamma

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

분포나 weibull 분포 적용 시와 동일한 방법으로, 평균값을 $\frac{1}{\lambda}$ 로 유지하고 분산 값을 $\frac{1}{\lambda^2}$ 로 동일하게 맞춘다. lognormal 분포의 밀도함수와 평균, 분산 값은 다음과 같다.

$$f(x;\mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \quad (3.7)$$

$$E(X)=e^{\mu+\sigma^2/2} \qquad V(X)=e^{2\mu+\sigma^2}\cdot(e^{\sigma^2}-1) \quad (3.8)$$

따라서 다음과 같은 식을 만족하여야만 한다.

$$\begin{cases}e^{\mu+\sigma^2/2}=\dfrac{1}{\lambda} & \text{-①}\\ e^{2\mu+\sigma^2}\cdot(e^{\sigma^2}-1)=\dfrac{1}{\lambda^2} & \text{-②}\end{cases} \quad (3.9)$$

식(3.9)에서 ①식을 제곱하여 ②식에 대입하면,

$$\begin{cases}\sigma^2=\ln 2\\ \mu=-\ln(\sqrt{2}\lambda)\end{cases} \quad (3.10)$$

를 만족해야만 한다. lognormal 분포의 생존함수의 식에 식(3.10)을 대입하면 다음과 같다.

$$s(x)=1-\Phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})=1-\Phi(\frac{\ln(x)+\ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}}) \quad (3.11)$$

common shock 확률변수 z가 lognormal 분포를 띠고 있고, 생존모델은 동일사력 법칙(constant force of mortality)을 가정하였을 때 Common Shock Model의 공식은 다음과 같이 나타난다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

결합생존 상태(joint-life status)일 때,

$$ {}_t p_{xy} = [\exp\{-(\mu_x^* t + \mu_y^* t)\}] \cdot \{1 - \Phi(\frac{\ln(t) + \ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \tag{3.12} $$

최종 생존자 상태(last-survivor status)일 때,

$$ {}_t p_{\overline{xy}} = [\exp\{-(\mu_x^* t)\} + \exp\{-(\mu_y^* t)\} - \exp\{-(\mu_x^* t + \mu_y^* t)\}] \cdot \{1 - \Phi(\frac{\ln(t) + \ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \tag{3.13} $$

예를 들어, 다음 표는 (x)가 40세, (y)가 50세일 때, 두 사람의 생존확률을

<표3-5> ${}_t p_x$

동일사력법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.961	0.961	0.961	0.960
2	0.923	0.922	0.919	0.914
3	0.886	0.881	0.872	0.859
4	0.848	0.838	0.820	0.797
5	0.811	0.793	0.766	0.732
6	0.774	0.747	0.710	0.667
7	0.736	0.701	0.655	0.605
8	0.699	0.656	0.602	0.547
9	0.663	0.611	0.552	0.493
10	0.627	0.569	0.505	0.443
11	0.592	0.528	0.461	0.398
12	0.559	0.490	0.420	0.358
13	0.526	0.453	0.383	0.321

<표3-6> ${}_t p_y$

동일사력법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.942	0.942	0.942	0.941
2	0.887	0.886	0.883	0.879
3	0.834	0.830	0.821	0.809
4	0.783	0.774	0.757	0.736
5	0.734	0.718	0.693	0.662
6	0.686	0.663	0.630	0.592
7	0.640	0.609	0.570	0.526
8	0.596	0.559	0.513	0.466
9	0.554	0.511	0.461	0.412
10	0.513	0.466	0.413	0.363
11	0.475	0.424	0.370	0.320
12	0.439	0.385	0.331	0.281
13	0.406	0.350	0.295	0.248

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<표3-7> ${}_{t}p_{xy}$

동일사력법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.905	0.905	0.905	0.904
2	0.819	0.817	0.815	0.811
3	0.740	0.736	0.729	0.718
4	0.667	0.659	0.645	0.627
5	0.601	0.588	0.567	0.542
6	0.540	0.521	0.495	0.466
7	0.484	0.461	0.431	0.398
8	0.433	0.406	0.373	0.338
9	0.386	0.356	0.322	0.287
10	0.344	0.312	0.277	0.243
11	0.306	0.273	0.238	0.206
12	0.272	0.238	0.205	0.174
13	0.241	0.208	0.176	0.147

<표3-8> ${}_{t}p_{\overline{xy}}$

동일사력법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.998	0.998	0.997	0.997
2	0.991	0.990	0.987	0.982
3	0.980	0.975	0.965	0.951
4	0.964	0.952	0.932	0.906
5	0.944	0.923	0.891	0.852
6	0.920	0.889	0.845	0.794
7	0.893	0.850	0.794	0.734
8	0.862	0.809	0.743	0.674
9	0.830	0.766	0.691	0.617
10	0.796	0.722	0.641	0.563
11	0.761	0.679	0.593	0.512
12	0.726	0.636	0.546	0.465
13	0.691	0.595	0.503	0.422

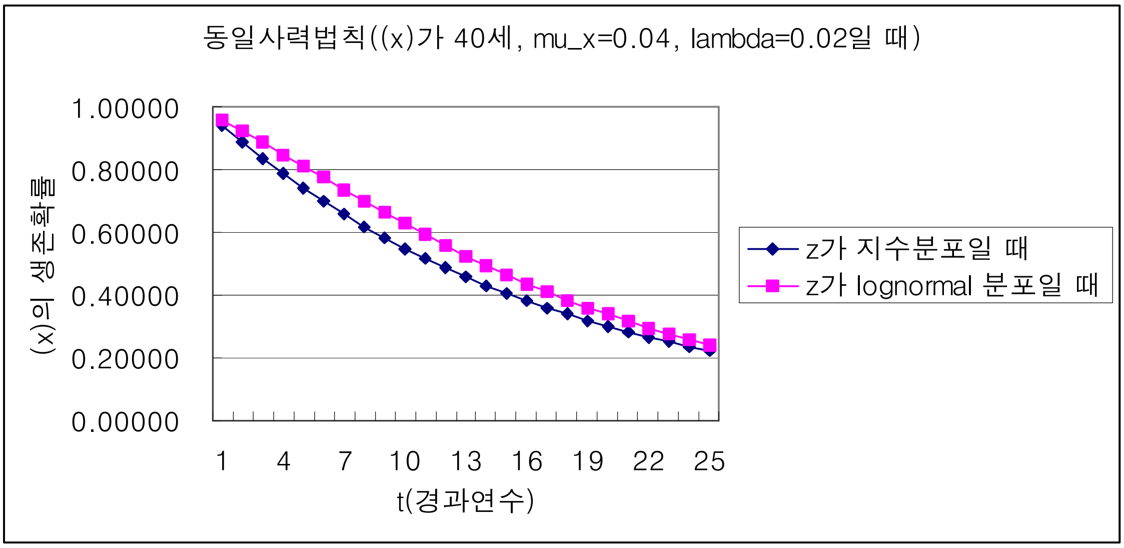
$\mu_x^* = 0.04,\ \mu_y^* = 0.06$ 라 가정 하에 식(3.12)과 식(3.13)을 이용하여 각각 결합생존 상태일 때와 최종 생존자 상태일 때의 값을 구해본 것이다.

마. common shock이 존재하였을 때 확률분포에 따른 생존확률 비교(동일사력법칙 가정)

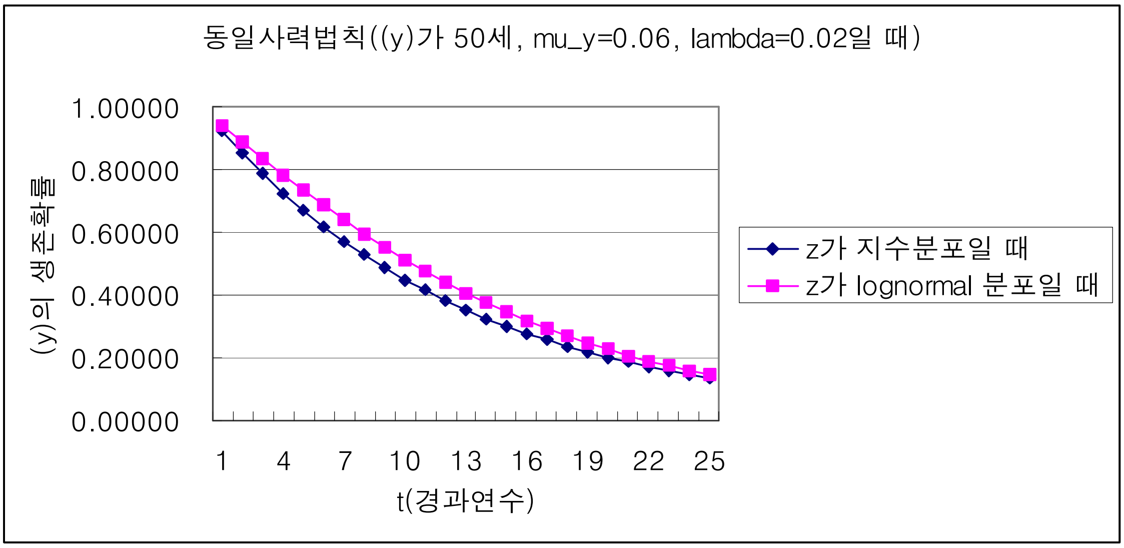
Common Shock Model의 공식을 유도하기 위해 다양한 생존모델들-de Moivre 법칙, 동일사력법칙(constant force of mortality), Gompertz 법칙, Makeham 법칙, Weibull 법칙- 중 우선 동일사력법칙을 가정하기로 하겠다. 그 가정 하에 common shock 확률변수가 지수분포 형태를 취하고 있을 경우와 lognormal 분포 형태를 취하고 있을 경우, 이렇게 두 경우에 대해 모델의 공식을 유도하였고, 표<3.1>~표<3.8>과 같은 결과를 얻을 수 있었다. 그 자료들을 이용하여 생존확률을 비교해본

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

결과 다음과 같은 그래프를 얻었다.

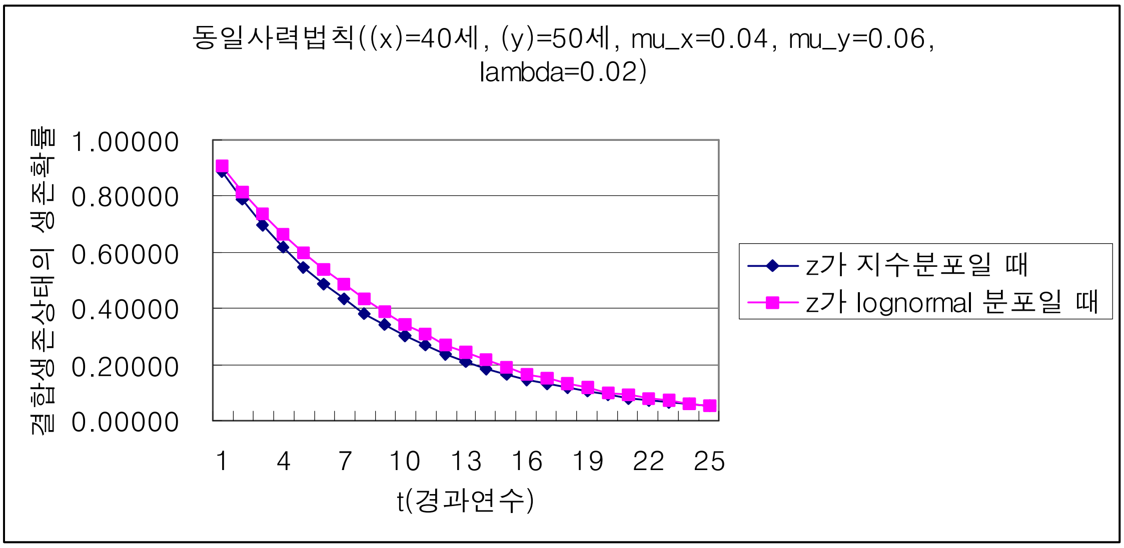


<그림 3-1: 동일사력법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (x)의 생존확률 비교>

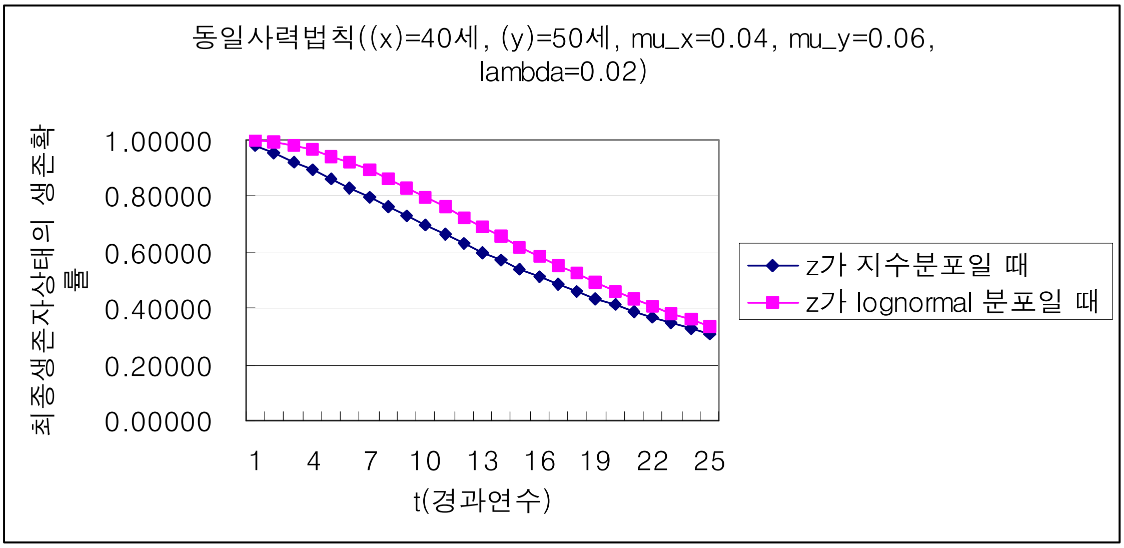


<그림 3-2: 동일사력법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (y)의 생존확률 비교>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY



<그림 3-3: 동일사력법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (xy)의 생존확률 비교>



<그림 3-4: 동일사력법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 ($\overline{xy}$)의 생존확률 비교>

그림<3.1>~그림<3.4>를 비교해본 결과, 동일사력법칙 가정 하에서는 common

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

shock 확률변수 z가 lognormal 분포를 띠고 있을 때가 지수분포 형태를 띠고 있을 때 보다 T(x), T(y), T(xy), T($\overline{xy}$) 네 경우 모두 생존확률이 높게 나오는 경향이 있음을 알 수 있었다.

2. 생존모델에 Gompertz 법칙을 적용했을 경우의 공식

가. common shock 확률변수 z가 지수분포(exponential distribution)일 때

생존모델에 Gompertz 법칙을 적용했을 때 사력과 생존함수는

$$\mu(x) = BC^x, \quad S(x)=\exp\left\{-\frac{B}{\ln C}(C^x - 1)\right\} \tag{3.14}$$

이다. common shock이 존재할 때 (xy)의 생존함수는 (x)과 (y)가 common shock이 존재하지 않았을 때의 각각의 생존함수들의 곱에 common shock 확률변수 z의 생존함수를 곱해주기만 하면 된다.(단, (x)과 (y)가 동일한 B, C 값을 갖고 있을 때)

$$\begin{aligned} {}_t p_{xy} &= \exp\{-\frac{BC^x}{\ln C}(C^t - 1)\}\exp\{-\frac{BC^y}{\ln C}(C^t - 1)\}\exp(-\lambda t) \\ &= \exp[-\{\frac{B(C^t - 1)}{\ln C}(C^x + C^y) + \lambda t\}] \end{aligned} \tag{3.15}$$

(x)와 (y)의 최종 생존자 상태(last-survivor status)의 생존함수 역시

${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy}$ 에 의해 구해진다.

따라서

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

$$
{}_t p_{\overline{xy}} = \exp[-\{\frac{BC^x}{\ln C}(C^t - 1) + \lambda t] + \exp[-\{\frac{BC^y}{\ln C}(C^t - 1) + \lambda t\}]
$$

$$
- \exp[-\{\frac{B(C^t - 1)}{\ln C}(C^x + C^y) + \lambda t\}] \tag{3.16}
$$

이다.

예를 들어, (x)가 40세 이고, (y)가 50세 이며, B=0.00005 와 C=$10^{0.04}$ 가정하면,

<표3-9> ${}_t p_x$

Gompertz 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.978	0.968	0.959	0.949
2	0.957	0.938	0.919	0.901
3	0.935	0.908	0.881	0.855
4	0.914	0.878	0.844	0.811
5	0.893	0.850	0.808	0.769
6	0.873	0.822	0.774	0.729
7	0.853	0.795	0.741	0.691
8	0.832	0.768	0.709	0.655
9	0.812	0.742	0.678	0.620
10	0.792	0.717	0.649	0.587
11	0.773	0.692	0.620	0.555
12	0.753	0.668	0.592	0.525
13	0.733	0.644	0.566	0.497

<표3-10> ${}_t p_y$

Gompertz법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.975	0.965	0.956	0.946
2	0.950	0.931	0.913	0.895
3	0.926	0.898	0.872	0.846
4	0.901	0.866	0.832	0.799
5	0.877	0.834	0.793	0.754
6	0.852	0.802	0.756	0.712
7	0.828	0.772	0.720	0.671
8	0.803	0.741	0.684	0.632
9	0.779	0.712	0.650	0.594
10	0.754	0.682	0.618	0.559
11	0.730	0.654	0.586	0.525
12	0.705	0.625	0.555	0.492
13	0.680	0.597	0.524	0.460

<표3-11> ${}_t p_{xy}$

Gompertz 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.973	0.963	0.954	0.944
2	0.946	0.927	0.909	0.891
3	0.919	0.892	0.866	0.840

<표3-12> ${}_t p_{\overline{xy}}$

Gompertz 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.980	0.970	0.961	0.951
2	0.961	0.942	0.923	0.905
3	0.942	0.914	0.887	0.861

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

4	0.892	0.857	0.824	0.792
5	0.866	0.823	0.783	0.745
6	0.839	0.790	0.744	0.700
7	0.812	0.757	0.706	0.658
8	0.785	0.724	0.669	0.617
9	0.757	0.692	0.633	0.578
10	0.730	0.661	0.598	0.541
11	0.702	0.629	0.564	0.505
12	0.675	0.599	0.531	0.471
13	0.647	0.568	0.499	0.438

4	0.923	0.887	0.852	0.819
5	0.904	0.860	0.818	0.778
6	0.886	0.835	0.786	0.740
7	0.869	0.810	0.755	0.704
8	0.851	0.786	0.725	0.669
9	0.834	0.762	0.696	0.636
10	0.817	0.739	0.669	0.605
11	0.800	0.716	0.642	0.575
12	0.783	0.695	0.616	0.546
13	0.767	0.673	0.591	0.519

식(3.22)과 식(3.23)에 의해 위의 표와 같은 값들을 갖게 되는 것이다.

나. common shock 확률변수 z가 lognormal 분포일 때

Common Shock Model에서 생존모델은 Gompertz 법칙을 적용하고, common shock 확률변수 z에 lognormal 분포를 적용하였을 때의 공식은 다음과 같다.
우선 common shock이 존재하지 않았을 때의 생존함수는

$$ {}_t p_x^{\ *} = \exp[-\{\frac{BC^x}{\ln C}(C^t - 1)\}] \tag{3.17} $$

이다. 여기에 common shock 확률변수 z의 생존 함수를 곱해준 값이 common shock이 존재했을 때의 생존함수가 되는 것이다.

$$ {}_t p_x = {}_t p_x^{\ *} \cdot s_z(t) = \exp[-\{\frac{BC^x}{\ln C}(C^t - 1)\}]\{1 - \Phi(\frac{\ln(t) + \ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \tag{3.18} $$

식(3.18)을 사용하여 결합생존 상태(joint-life status)와 최종 생존자 상태(last-survivor status)를 구하면 다음과 같다.(단, (x), (y)가 동일한 B,C 값을 갖는다는 조건하에)

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

$$
{}_t p_{xy} = \exp[-\{\frac{BC^x}{\ln C}(C^t-1)\}]\cdot\exp[-\{\frac{BC^y}{\ln C}(C^t-1)\}]\cdot\{1-\Phi(\frac{\ln(t)+\ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\},
$$

$$
{}_t p_{\overline{xy}} = \left[\exp[-\{\frac{BC^x}{\ln C}(C^t-1)\}]+\exp[-\{\frac{BC^y}{\ln C}(C^t-1)\}]\right]\cdot\{1-\Phi(\frac{\ln(t)+\ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\}
$$

$$
-\exp[-\{\frac{BC^x}{\ln C}(C^t-1)\}]\cdot\exp[-\{\frac{BC^y}{\ln C}(C^t-1)\}]\cdot\{1-\Phi(\frac{\ln(t)+\ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \tag{3.19}
$$

예를 들어, 식(3.19)을 이용하여 (x)가 40세, (y)가 50세 이며, B=0.00005와 C=$10^{0.04}$ 라 가정했을 때의 생존확률을 구해보면 다음과 같다.

<표3-13> ${}_t p_x$

Gompertz 법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.998	0.998	0.998	0.997
2	0.995	0.994	0.991	0.986
3	0.992	0.987	0.977	0.962
4	0.986	0.974	0.954	0.926
5	0.978	0.957	0.924	0.883
6	0.968	0.935	0.889	0.835
7	0.955	0.910	0.850	0.785
8	0.940	0.882	0.810	0.736
9	0.924	0.852	0.770	0.687
10	0.905	0.821	0.729	0.640
11	0.885	0.789	0.689	0.596
12	0.864	0.757	0.650	0.554
13	0.842	0.725	0.613	0.514

<표3-14> ${}_t p_y$

Gompertz 법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.995	0.995	0.994	0.994
2	0.989	0.988	0.985	0.980
3	0.981	0.976	0.967	0.952
4	0.972	0.960	0.940	0.913
5	0.960	0.938	0.906	0.866
6	0.945	0.913	0.867	0.815
7	0.927	0.883	0.825	0.762
8	0.908	0.851	0.782	0.710
9	0.886	0.817	0.738	0.659
10	0.862	0.782	0.694	0.609
11	0.836	0.746	0.651	0.562
12	0.809	0.709	0.609	0.518
13	0.781	0.673	0.568	0.477

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<표3-15> ${}_t p_{xy}$

Gompertz 법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.993	0.993	0.992	0.992
2	0.984	0.983	0.980	0.976
3	0.975	0.970	0.960	0.946
4	0.962	0.951	0.931	0.904
5	0.948	0.927	0.895	0.855
6	0.930	0.898	0.854	0.802
7	0.909	0.866	0.809	0.748
8	0.886	0.831	0.764	0.693
9	0.861	0.794	0.717	0.640
10	0.834	0.756	0.671	0.590
11	0.805	0.718	0.626	0.541
12	0.775	0.679	0.583	0.496
13	0.743	0.640	0.540	0.453

<표3-16> ${}_t p_{\overline{xy}}$

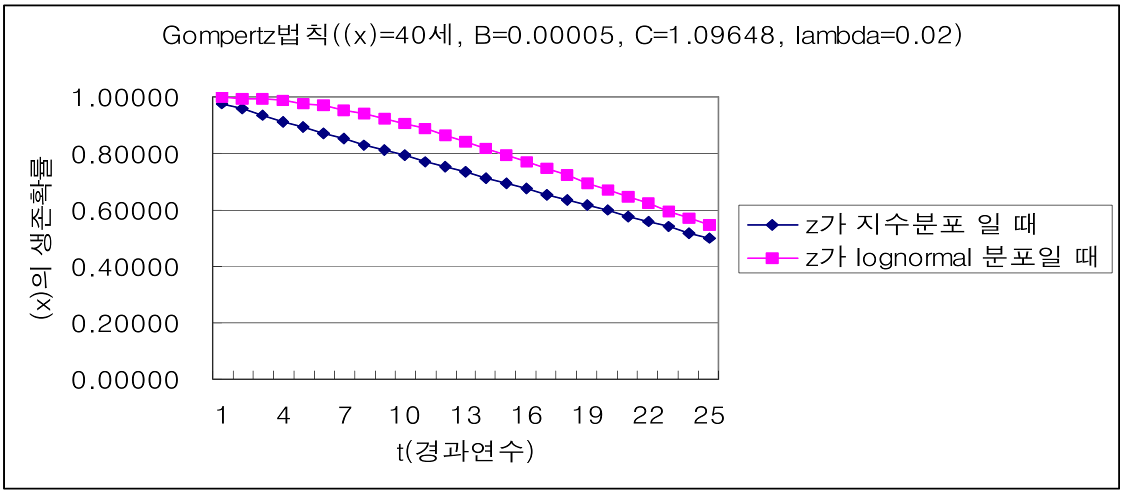
Gompertz 법칙, z가 lognormal 분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	1.000	1.000	1.000	0.999
2	1.000	0.998	0.996	0.991
3	0.998	0.993	0.983	0.969
4	0.995	0.983	0.963	0.935
5	0.990	0.968	0.935	0.894
6	0.983	0.949	0.902	0.848
7	0.973	0.927	0.866	0.800
8	0.962	0.902	0.828	0.752
9	0.948	0.875	0.790	0.705
10	0.933	0.846	0.751	0.660
11	0.916	0.817	0.713	0.617
12	0.899	0.788	0.676	0.576
13	0.880	0.758	0.640	0.537

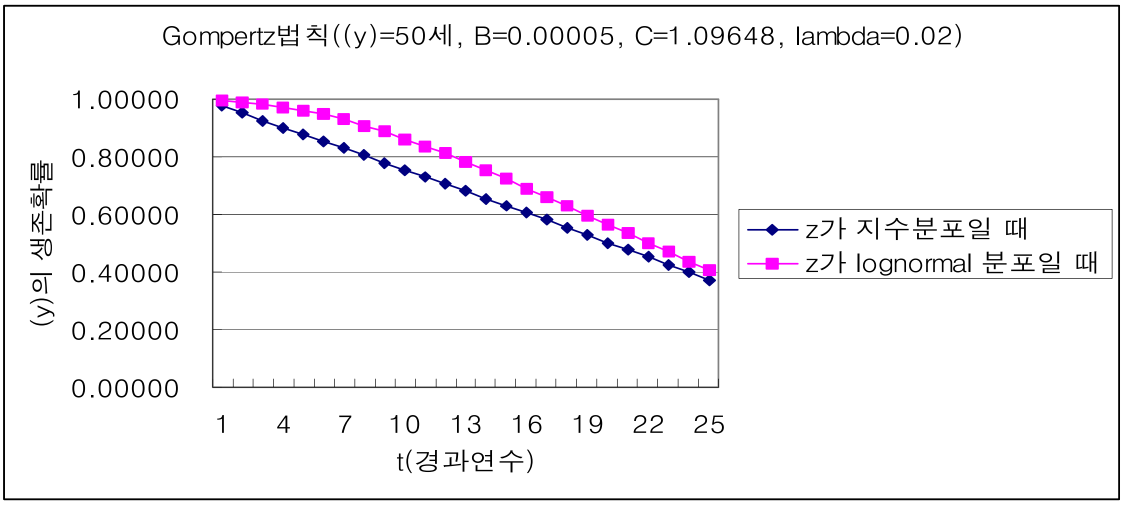
다. common shock이 존재하였을 때 확률분포에 따른 생존확률 비교(Gompertz 법칙 가정)

표<3.9>~표<3.16>에서 사용한 예시에서와 같이 $B=\frac{0.05}{1000}$, $C=10^{0.04}$, (x)를 40세, (y)를 50세, 그리고 $\lambda=0.02$ 를 가정하여 t년이 경과할 때까지의 생존확률을 분포별로 비교해 보았다. 다음의 그림<3.5>~그림<3.8>에서 알 수 있듯이 생존확률은 common shock 확률변수 z가 lognormal 분포일 때가 지수분포일 때 보다 더 높았다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

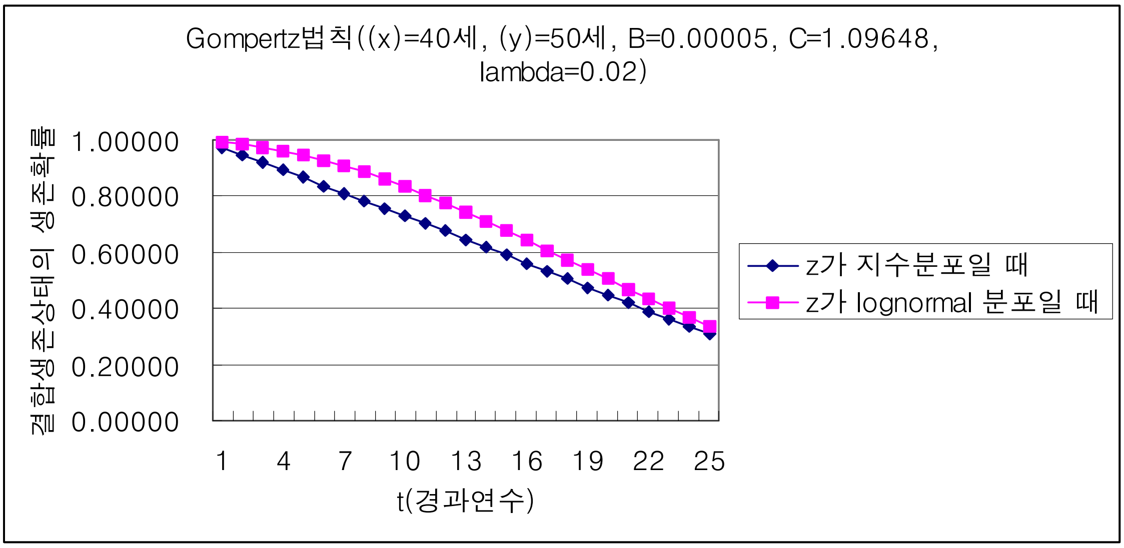


<그림 3-5: Gompertz법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (x)의 생존확률 비교>

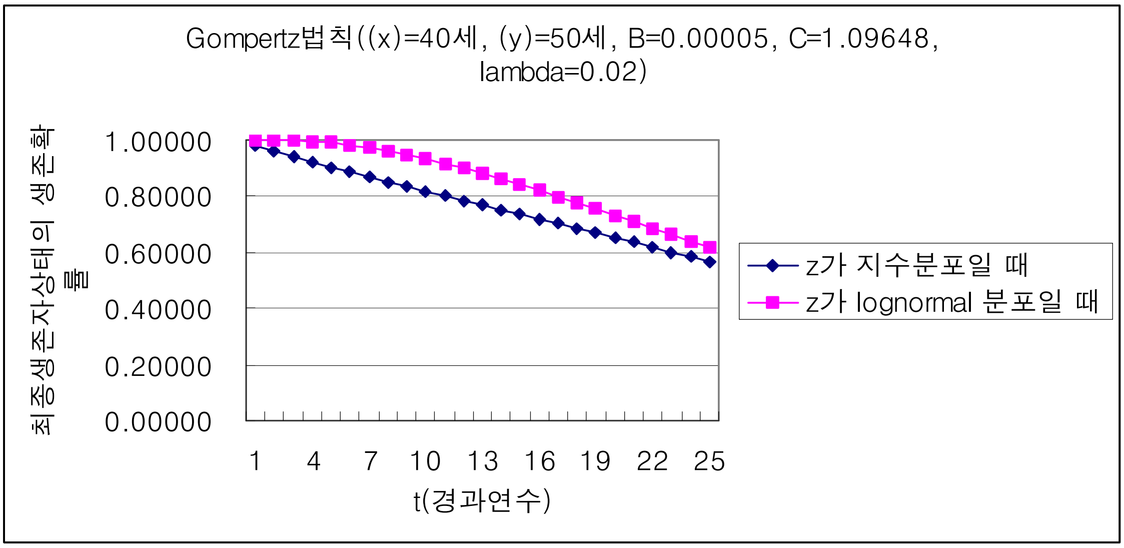


<그림 3-6: Gompertz법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (y)의 생존확률 비교>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY



<그림 3-7: Gompertz법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (xy)의 생존확률 비교>



<그림 3-8: Gompertz법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 ($\overline{xy}$)의 생존확률 비교>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

3. 생존모델에 De Moivre 법칙을 적용했을 경우의 공식

가. common shock 확률변수 z가 지수분포(exponential distribution)일 때

Common Shock Model에서 생존모델이 de Moivre 법칙을 적용한다면 common shock이 존재하지 않을 때 사력과 생존함수는

$$\mu(x) = \frac{1}{\omega - x} \quad , \quad {}_t\mathrm{P}_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x} \tag{3.20}$$

이다. common shock 확률변수 z가 지수 분포(exponential distribution)를 띠고 있을 때 common shock이 존재할 때의 생존함수는

$$ {}_t p_x = \frac{\omega - x - t}{\varpi - x} \cdot e^{-\lambda t} \tag{3.21}$$

이다. $T^*(x)$, $T^*(y)$, 확률변수 z는 상호독립인 관계이므로 common shock에 의한 사망 가능성을 포함했을 때 생존할 확률은

$$ {}_t p_{xy} = \frac{\omega - x - t}{\varpi - x} \cdot \frac{\omega - y - t}{\varpi - y} \cdot e^{-\lambda t},$$

$$ {}_t p_{\overline{xy}} = \left(\frac{\omega - x - t}{\varpi - x} + \frac{\omega - y - t}{\varpi - y}\right) e^{-\lambda t} - \frac{\omega - x - t}{\varpi - x} \cdot \frac{\omega - y - t}{\varpi - y} \cdot e^{-\lambda t} \tag{3.22}$$

common shock 확률변수 z가 gamma 분포, weibull 분포일 경우에도 식(3.5)과 식(3.6)에 의해 지수 분포(exponential distribution)일 때와 같은 결과를 갖는다.

간단한 예를 통해 생존확률을 구해보고자 한다.

ω 값이 100이라 가정하고, (x)가 40세, (y)가 50세일 때 식(3.22)을 통해서 각각의 생존확률을 구해보도록 하겠다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<표3-17> $_{t}p_{x}$

De Moivre 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.964	0.954	0.945	0.935
2	0.929	0.910	0.892	0.875
3	0.895	0.868	0.843	0.818
4	0.862	0.828	0.795	0.764
5	0.829	0.789	0.751	0.714
6	0.798	0.752	0.708	0.667
7	0.768	0.716	0.668	0.622
8	0.739	0.682	0.629	0.581
9	0.710	0.649	0.593	0.542
10	0.682	0.617	0.559	0.505
11	0.655	0.587	0.526	0.471
12	0.629	0.558	0.495	0.439
13	0.604	0.530	0.466	0.409

<표3-18> $_{t}p_{y}$

De Moivre 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.961	0.951	0.942	0.932
2	0.922	0.904	0.886	0.869
3	0.885	0.859	0.834	0.809
4	0.849	0.816	0.784	0.753
5	0.814	0.775	0.737	0.701
6	0.780	0.735	0.692	0.652
7	0.748	0.697	0.650	0.606
8	0.716	0.661	0.610	0.563
9	0.685	0.626	0.572	0.523
10	0.655	0.593	0.536	0.485
11	0.626	0.561	0.502	0.450
12	0.598	0.530	0.470	0.417
13	0.571	0.501	0.440	0.386

<표3-19> $_{t}p_{xy}$

De Moivre 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.945	0.935	0.926	0.917
2	0.892	0.874	0.857	0.840
3	0.841	0.816	0.792	0.769
4	0.793	0.762	0.732	0.703
5	0.746	0.710	0.675	0.643
6	0.702	0.662	0.623	0.587
7	0.660	0.616	0.574	0.535
8	0.620	0.573	0.529	0.488
9	0.582	0.532	0.486	0.444
10	0.546	0.494	0.447	0.404
11	0.511	0.458	0.410	0.368
12	0.478	0.424	0.376	0.334
13	0.447	0.392	0.345	0.303

<표3-20> $_{t}p_{\overline{xy}}$

De Moivre 법칙, z가 지수분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.980	0.970	0.960	0.951
2	0.960	0.941	0.922	0.904
3	0.939	0.911	0.884	0.858
4	0.918	0.882	0.848	0.814
5	0.897	0.854	0.812	0.772
6	0.876	0.825	0.777	0.732
7	0.855	0.797	0.743	0.693
8	0.834	0.770	0.711	0.656
9	0.813	0.743	0.679	0.620
10	0.791	0.716	0.648	0.586
11	0.770	0.690	0.618	0.554
12	0.749	0.664	0.589	0.522
13	0.728	0.639	0.561	0.493

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

나. common shock 확률변수 z가 lognormal 분포일 때

common shock이 존재하지 않을 때 생존함수는 식(3.20)의 생존함수 형태를 띠고, 확률변수 z의 생존함수는 식(3.21)이므로, $T^{*}(x)$, $T^{*}(y)$, 확률변수 z가 상호독립 관계라는 것을 이용하여 생존함수들을 각각 곱하여 주면 결합생존 상태(joint-life status)를 구할 수 있다.

$$ {}_t p_{xy} = \frac{\omega - x - t}{\varpi - x} \cdot \frac{\omega - y - t}{\varpi - y} \{1 - \Phi(\frac{\ln(t) + \ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \tag{3.23} $$

${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy}$ 에 의해서 최종 생존자 상태(last-survivor status)는

$$ \begin{aligned} {}_t p_{\overline{xy}} &= (\frac{\omega - x - t}{\varpi - x} + \frac{\omega - y - t}{\varpi - y}) \cdot \{1 - \Phi(\frac{\ln(t) + \ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \\ &- \frac{\omega - x - t}{\varpi - x} \cdot \frac{\omega - y - t}{\varpi - y} \{1 - \Phi(\frac{\ln(t) + \ln(\sqrt{2}\lambda)}{\sqrt{\ln 2}})\} \end{aligned} \tag{3.24} $$

다음 표는 ω 값이 100이고, (x)가 40세, (y)가 50세일 때 식(3.23), 식(3.24)을 이용해 생존확률을 구한 것이다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<표3-21> $_{t}p_{x}$

De Moivre법칙, z가 lognormal분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.983	0.983	0.983	0.983
2	0.966	0.965	0.962	0.958
3	0.949	0.944	0.934	0.920
4	0.929	0.918	0.899	0.873
5	0.908	0.888	0.857	0.820
6	0.885	0.855	0.813	0.764
7	0.860	0.819	0.766	0.707
8	0.834	0.782	0.719	0.653
9	0.807	0.745	0.673	0.600
10	0.779	0.707	0.628	0.551
11	0.751	0.670	0.584	0.505
12	0.722	0.633	0.543	0.463
13	0.693	0.597	0.504	0.423

<표3-22> $_{t}p_{y}$

De Moivre법칙, z가 lognormal분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.980	0.980	0.980	0.979
2	0.960	0.959	0.956	0.951
3	0.939	0.934	0.924	0.911
4	0.916	0.905	0.886	0.861
5	0.892	0.872	0.842	0.805
6	0.865	0.836	0.794	0.747
7	0.838	0.798	0.746	0.689
8	0.809	0.758	0.697	0.633
9	0.779	0.719	0.649	0.579
10	0.748	0.679	0.602	0.529
11	0.717	0.640	0.558	0.483
12	0.686	0.601	0.516	0.439
13	0.655	0.564	0.477	0.400

<표3-23> $_{t}p_{xy}$

De Moivre법칙, z가 lognormal분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	0.964	0.964	0.963	0.963
2	0.928	0.927	0.924	0.919
3	0.892	0.887	0.878	0.865
4	0.855	0.844	0.827	0.803
5	0.817	0.799	0.772	0.738
6	0.779	0.752	0.715	0.672
7	0.740	0.705	0.659	0.608
8	0.701	0.657	0.604	0.548
9	0.662	0.611	0.552	0.492
10	0.624	0.566	0.502	0.441
11	0.586	0.522	0.456	0.394
12	0.549	0.481	0.413	0.352
13	0.513	0.442	0.373	0.313

<표3-24> $_{t}p_{\overline{xy}}$

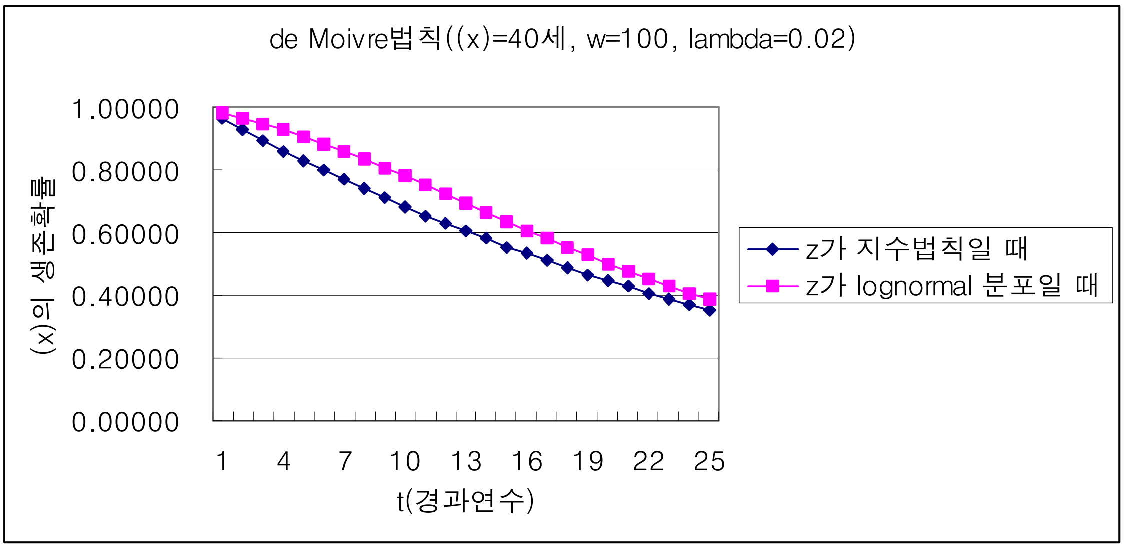
De Moivre법칙, z가 lognormal분포 가정

t	λ_1 0.02	λ_2 0.03	λ_3 0.04	λ_4 0.05
1	1.000	1.000	0.999	0.999
2	0.998	0.997	0.994	0.989
3	0.995	0.990	0.980	0.966
4	0.990	0.978	0.958	0.930
5	0.982	0.961	0.928	0.887
6	0.972	0.938	0.892	0.838
7	0.958	0.912	0.853	0.788
8	0.942	0.884	0.812	0.737
9	0.924	0.853	0.770	0.687
10	0.904	0.820	0.728	0.639
11	0.883	0.787	0.687	0.594
12	0.859	0.753	0.647	0.550
13	0.835	0.720	0.608	0.510

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

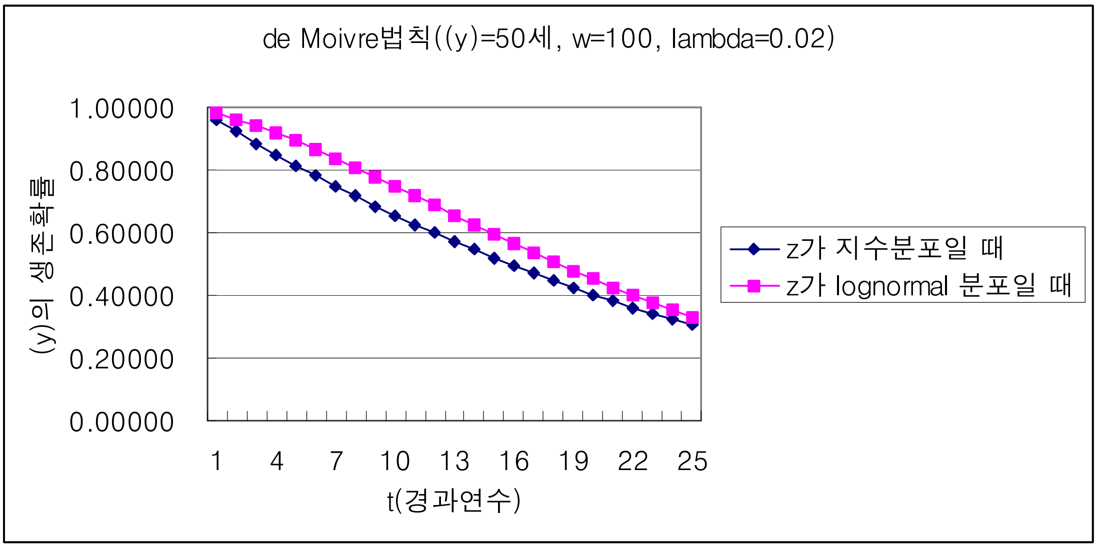
다. common shock이 존재하였을 때 확률분포에 따른 생존확률 비교(De Moivre 법칙 가정)

식(3.23)과 식(3.24)에 $\omega = 100$ 와 (x)=40세, (y)=50세를 대입한 결과 표<3.21>~표<3.24>와 같은 생존확률 값을 얻었다. 이 표를 이용하여 common shock이 존재하지 않았을 때의 생존함수에 de Moivre법칙을 적용하였을 때, common shock 확률변수에 어떤 분포를 사용하느냐에 따라 생존확률이 달라짐을 확인할 수 있었다.

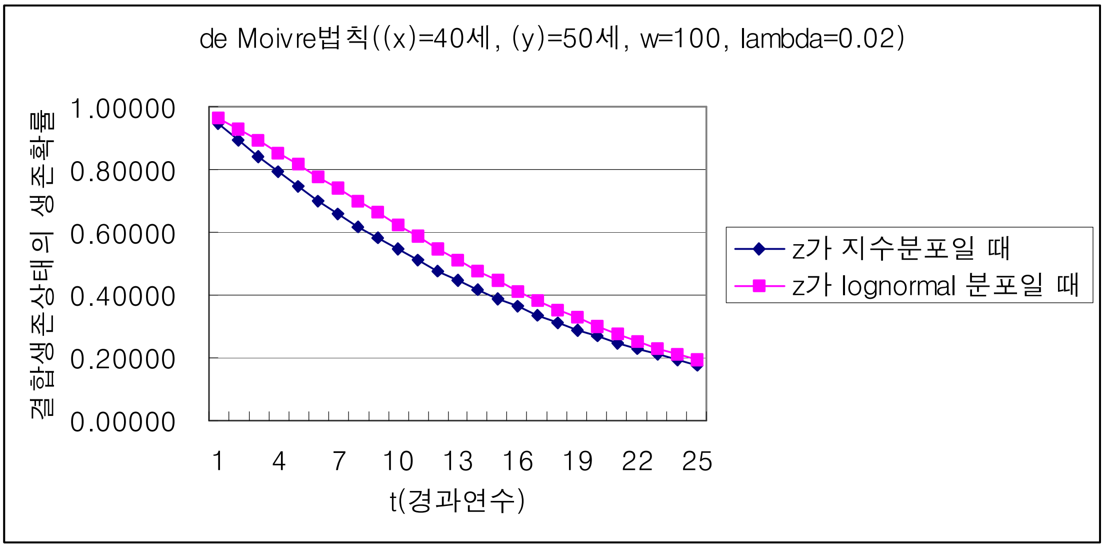


<그림 3-9: De Moivre법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (x)의 생존확률 비교>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

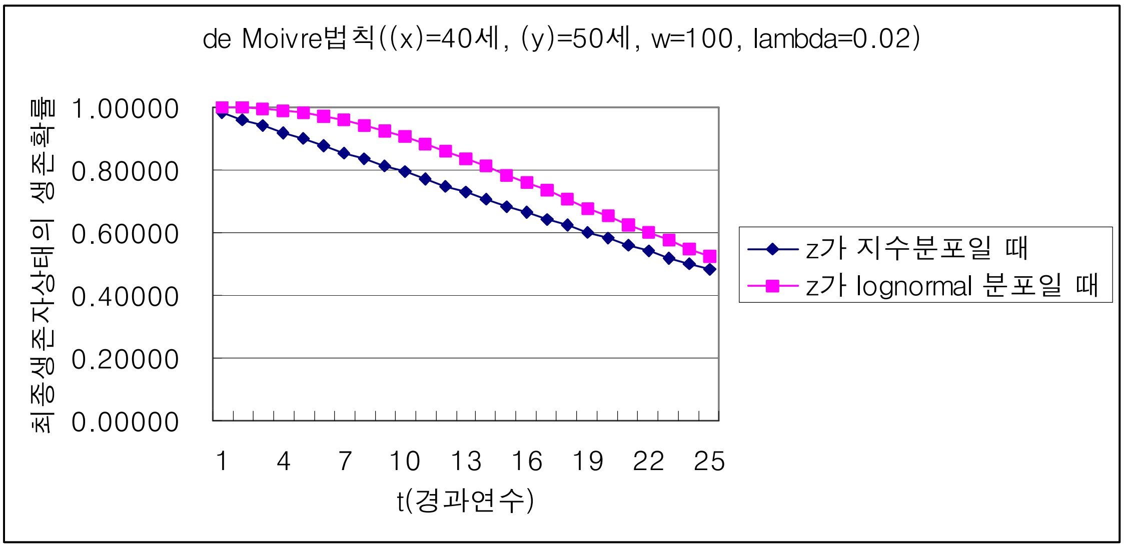


<그림 3-10: De Moivre법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (y)의 생존확률 비교>



<그림 3-11: De Moivre법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 (xy)의 생존확률 비교>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

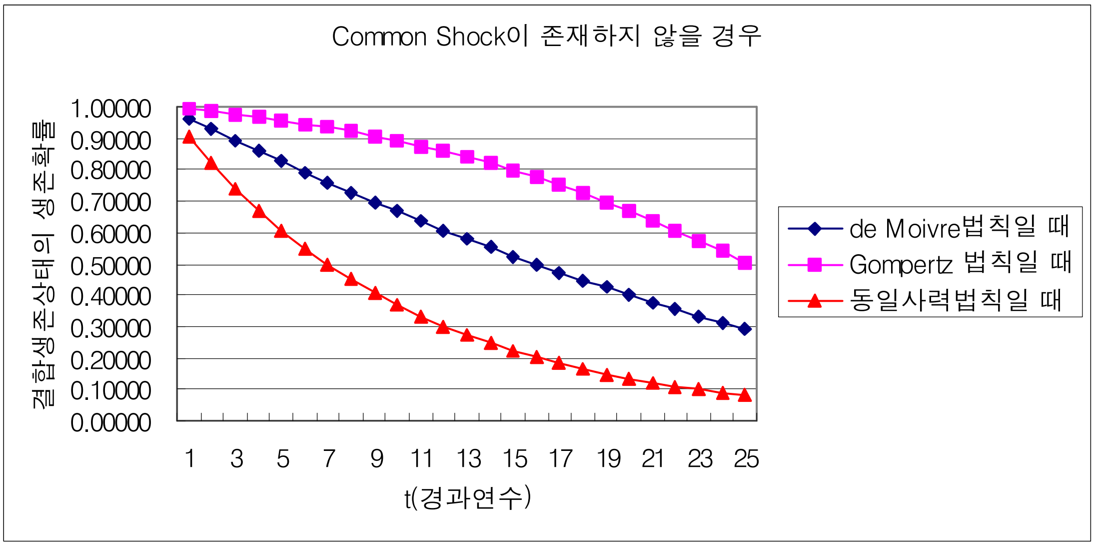


<그림 3-12: De Moivre법칙 적용 시 z의 분포 형태에 따른 $(\overline{xy})$의 생존확률 비교>

라. common shock의 존재 유무에 따른 생존확률 비교

common shock이 존재하지 않을 경우, 결합생존상태의 생존확률은 ${}_tp_{xy} = {}_tp_y \times {}_tp_y$ 이다. 하지만 common shock이 존재할 경우에는 common shock이 존재하지 않을 때의 생존확률에 common shock의 확률변수 z의 생존함수를 곱하여 구할 수 있다. 다음의 세 그림을 통해 common shock이 존재하지 않을 경우와 그리고 common shock이 존재할 경우 어떤 생존모델을 가정하였을 때 생존확률이 더 높은지 비교 평가해 볼 수 있다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY



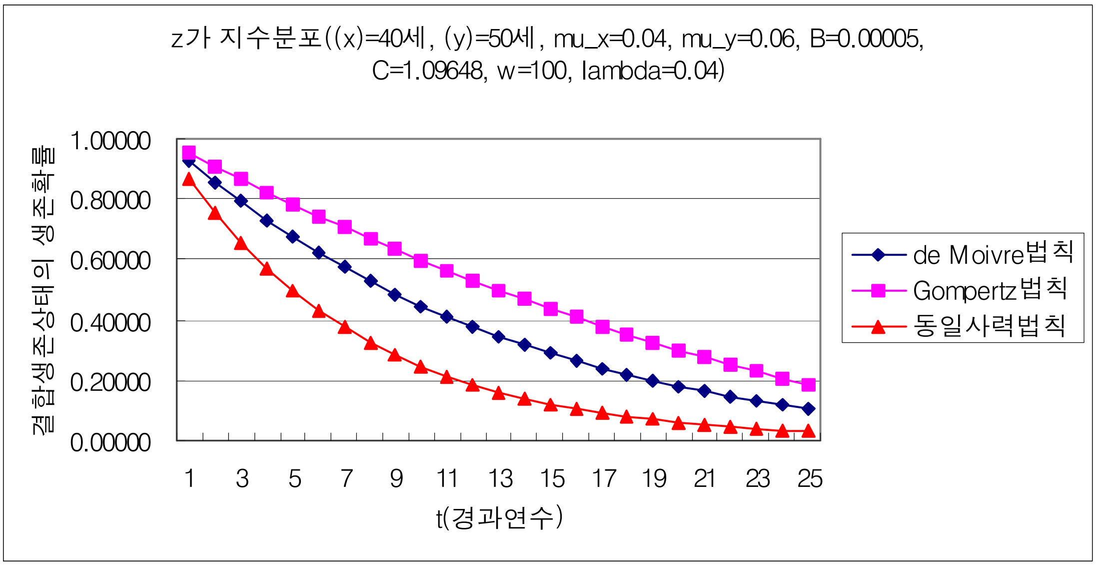
<그림 3.13: Common Shock이 존재하지 않을 때 (xy)의 생존확률 비교>

$$\mu_x{}^* = 0.04, \quad \mu_y{}^* = 0.06$$

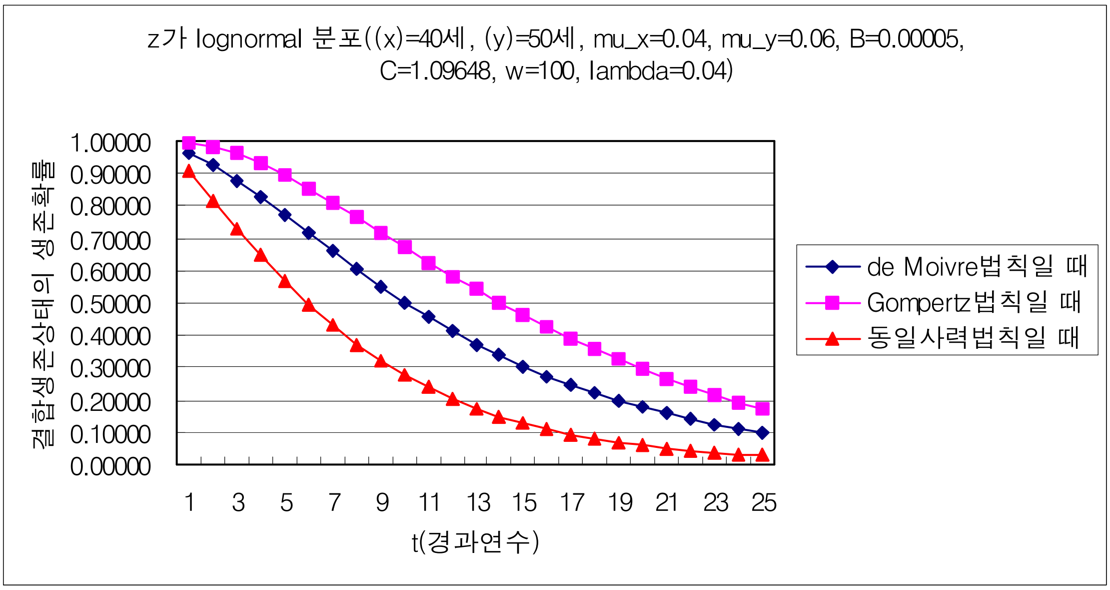
$$B = \frac{0.05}{1000}, \quad C = 10^{0.04}$$

$\omega = 100$, (x)는 40세, (y)는 50세라는 가정을 전제로 하였을 때,

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY



<그림 3.14: common shock 확률변수 z가 지수분포일 때 (xy)의 생존확률 비교>



<그림 3.15: common shock 확률변수 z가 lognormal 분포일 때 (xy)의 생존확률>

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

그림<3.13>~그림<3.15>을 통하여 common shock의 존재유무에 상관없이 생존모델이 Gompertz 법칙일 때의 생존확률이 가장 높고, 그 다음은 de Moivre 법칙일 때의 생존확률, 마지막으로 동일사력법칙일 때의 생존확률이 세 가지 생존모델들 중 가장 낮은 생존확률을 가짐을 알 수 있었다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

제4장 결 론

지금까지 T(x)와 T(y)가 독립이 아닌 경우, 즉 종속생존기간 모델(Dependent Lifetime Models)을 도입하여 일반적인 결합분포에 대해 살펴보았다. Common Shock 확률변수는 비행기 사고나 지진, 태풍 등 외생적인 사고로 인해 2인 이상의 다수의 생존자가 동시에 사망할 수 있는 확률을 구하기 위해 도입되었다. 이 논문을 통해 일반적으로 Common Shock Model로 제시된 공식-동일사력법칙과 지수분포 가정-에 여러 가지 다양한 분포와 법칙들을 가정하고, 적용하여 새로운 공식을 유도해보고자 하였다. 우선 다양한 생존모델들 중 동일사력법칙(Constant Force of Mortality), Gompertz 법칙, de Moivre 법칙을 각각 전제로 하여 모델을 변형시키고자 하였다. 그리고 common shock 확률변수는 지수분포와 비교하기 위해서 각 분포들의 평균과 분산을 지수분포의 평균과 분산 값과 동일한 값을 갖도록 각각의 확률밀도함수와 생존함수를 변형시켜서 common shock model의 공식에 적용해 보았다. 그 결과 gamma 분포와 weibull 분포는 그러한 과정을 통해 지수분포와 같은 생존함수 형태를 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 그래서 그 외에 lognormal 분포를 동일한 방식으로 평균과 분산 값을 동일하게 하여 확률밀도함수를 λ 에 관한 식으로 변형하여 지수분포와 비교 가능하도록 하였다. 본문 내용을 통해 동일사력법칙, Gompertz 법칙, de Moivre 법칙 모두 common shock 확률변수 z가 lognormal 분포일 때가 지수분포일 때 보다 높은 생존확률을 가짐을 확인할 수 있었다. 또한 역으로 common shock 확률 변수 z가 지수분포 또는 lognormal 분포이었을 때 각 생존모델들의 생존확률을 비교해 본 결과 common shock의 유무와 상관없이 생존확률은 가장 높은 순으로 Gompertz 법칙, de Moivre 법칙, 동일사력법칙이었음을 확인할 수 있었다.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

<참 고 문 헌>

[1] ACTEX study manual SOA Exam MLC Life Contingencies-Volume2, Hassett, Stewart 20071.

[2] Actuarial Mathematics, Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbitt 1997; 257-305

[3] Comparing Two Models with Dependent Classes of Business, Kam C. Yuen, Guojing Wang

[4] Dependency of Risks in Annuity Valuation, Wah-yan Stephanie Shek 2003

[5] Lecture Note from Dr. Yvonne Chueh, Central Washington University

[6] Modelling the short-term dependence between two remaining lifetimes, Jaap Spreeuw and Xu Wang 2008

[7] Probability and statistics for engineering and the sciences-5th ed., Jay L. Devore 1999; 172-181

[8] Statistics: theory and methods-2nd ed., Donald A. Berry, Bernard W. Lindgren 1996; 237-245: 249-250

[9] Survival Function estimation when lifetime and censoring time are dependent, Nader Ebrahimi, Daniel Molefe 2001

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

ABSTRACT

Modification of Common Shock Models

Baek, Hye-Youn
Department of Actuarial Science
Graduate School
Sungkyunkwan University

Insurance industry practice assumes independence of lives when valuing annuities where the promise is based on more than one life. However, the phenomenon of overpricing or underpricing in the insurance products like pension, joint-life and last-survivor annuities will be happened when the assumption of mutual independency of the life times is made. Recently, a number of papers have been devoted to the study of the impact of a possible dependence among insured risks. The common shock model can describe the situation where the dependence of lives arises from an exogenous event that is common to each life. In Bower's book, Actuarial Mathematics, common shock and copula models are introduced to describe dependencies in joint-life and last-survivor statuses. This paper presents various formulas for the Common Shock Models. We will modify the formula by using different mortality assumptions and distributions for the common shock random variable.

SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY